

Introducción a la Teoría de los Monopolos Magnéticos

Mauricio Vargas Villegas
Grupo PROTONS
Facultad de Ciencias Naturales y Matemáticas
mauricio.vargas@unibague.edu.co
Universidad de Ibagué
Ibagué, Colombia

Índice general

1. Resumen	5
2. Introducción a la Electrodinámica	7
2.0.1. Potenciales Vectoriales	10
2.0.2. Simetría de las Ecuaciones de Maxwell	13
3. Relatividad Especial	15
4. Invarianza Carga Eléctrica-Covarianza ED	23
5. Radiación Electromagnética	29
6. Monopolos Magnéticos	33
6.0.3. Teoría del Monopolo sin Cuerdas de Dirac	42
7. La Teoría de los Polos Magnéticos	45
8. Incoherencias Teoría Monopolo Magnético	77
9. Apéndices	81
9.1. Delta de Dirac	81
9.2. Función de Pauli-Jordan	83
9.3. Ecuación Laplace en CE	83
9.3.1. Aplicaciones en la Electrodinámica	87
9.4. Clases de Gauge	90
9.5. Campo de un Solenoide Largo y Delgado	90
9.6. Principio de Mínima Acción	95

Capítulo 1

Resumen

Este documento tiene como objetivo hacer una introducción a la teoría de los monopolos magnéticos clásicos y cuánticos, introduciendo la electrodinámica desde el punto de vista conceptual intentando hasta donde sea posible no descuidar la formulación matemática con el fin de explicar tanto física como matemáticamente las ecuaciones de Maxwell; posteriormente se hará una breve pero profunda exposición de las bases de la relatividad especial que tiene como objetivo usarla para que junto con la electrodinámica se pueda formular la teoría covariante de la electrodinámica y analizar su invarianza de Lorentz. El documento busca modelar el campo electromagnético del monopolo magnético con el objetivo de compararlo con el campo electromagnético de los polos eléctricos estáticos, y en movimiento. A manera introductoria se puede observar que el campo de los monopolos es interesante pues en la electrodinámica clásica se ha supuesto la no existencia de los polos magnéticos libres (PM). Clásicamente los monopolos se definen mediante una rotación de $\pi/2$, lo que se llama una transformación de dualidad. Dirac [1], demostró que el polo magnético sería necesario para cuantizar la carga eléctrica, pero se encontró un problema muy serio con una singularidad para $\theta = (0, \pi)$ que se llamó la cuerda de Dirac. Aunque nunca hubo evidencia experimental del monopolo y Dirac al final de su vida puso en duda la existencia de éste, parece ser que la falla está en elementos erróneos de la teoría de Dirac. Adicionalmentelos monopolos relacionan muy cercanamente la física de partículas y la cosmología, pues a muy altas energías se restablece el grupo de unificación, con cuyo enfriamiento la simetría fue espontáneamente rota. También la teoría puede definir un nuevo tipo de interacciones a un orden tal que se podría cambiar el número bariónico llevando a la predicción de

que el protón sería inestable. Finalmente en la teoría de unificación habrían partículas estables que llevan cargas magnéticas o monopolos magnéticos. Una de las teorías postuladas para la unificación es la teoría de las cuerdas, aunque ésta aún está en desarrollo es muy matemática y en este momento, no parece que sea posible su verificación experimental lo que la hace una teoría que sea de mucho agrado para los físicos.

Las críticas a los monopolos son muy interesantes [2], [3], [4], [5] pero solo desde el punto de vista de la simetría de las ecuaciones de Maxwell, es innegable la importancia del monopol magnético. La dificultad para estudiar experimentalmente al PM es que se requerirían aceleradores con una energía del orden de 10^{15} GeV, los cuales aún no se han construido.

Capítulo 2

Introducción a la Electrodinámica

Las ecuaciones de Maxwell en unidades Gaussianas $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$ (para convertirlas al sistema MKS ó SI, se debe tener en cuenta la equivalencia $\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$ y $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$) son:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0\end{aligned}\tag{2.1}$$

en las cuales la Ley de Gauss, $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$, significa que la densidad de flujo eléctrico diverge desde un foco (densidad de carga eléctrica positiva) o hacia un sumidero (densidad de carga eléctrica negativa), con lo que se pueden graficar las líneas de campo eléctrico de forma radial. Así en una región del espacio tridimensional se construye una superficie cerrada imaginaria, denominada superficie Gaussiana, con el objetivo de analizar el flujo de las líneas de campo. Si se considera el espacio en un volumen τ , la Ley de Gauss toma la forma,

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{D}) d\tau = 4\pi \int_{\tau} \rho d\tau,\tag{2.2}$$

se puede observar que hay una relación directa entre ese volumen y una superficie cerrada por medio del Teorema de la Divergencia o de Gauss, quedando

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q.\tag{2.3}$$

Si el campo es constante, para una carga puntual, que es simétrica con una superficie esférica se llega a la conocida Ley de Coulomb,

$$\mathbf{D} = \frac{q}{r^3} \hat{\mathbf{r}} \quad (2.4)$$

que el sistema MKS es

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^3}. \quad (2.5)$$

donde se usó la relación $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, que relaciona los dos campos vectoriales eléctricos (el campo densidad de flujo eléctrico \mathbf{D} y el campo intensidad de campo eléctrico \mathbf{E}).

Teniendo en cuenta la identidad del cálculo vectorial $\nabla r^{-1} = -r^{-3} \mathbf{r}$, se puede reescribir la Ley de Coulomb quedando

$$\mathbf{E} = -\nabla \left(\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) = -\nabla \Phi \quad (2.6)$$

donde Φ es una función escalar, o campo escalar denominada potencial eléctrico, que define el trabajo por unidad de carga para mover ésta de un punto a otro en contra del campo eléctrico.

La Ley de Ampere-Maxwell, $\nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$, dice que si existe una densidad de corriente eléctrica, habrá una circulación de la intensidad de campo magnético alrededor de ésta, pero para poder conservar la continuidad de corriente eléctrica, es necesario que la densidad de flujo eléctrico sea temporalmente variante. Lo anterior se puede observar analizando que la divergencia de un rotacional siempre es cero, pues el rotacional produce una circulación, que no posee divergencia. Por tanto si existe variación temporal del campo eléctrico existirá un campo magnético sin necesidad alguna de fuentes. Así,

$$-\frac{1}{c} \nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi}{c} \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.7)$$

lo que se reduce a

$$-\frac{\partial}{\partial t} \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.8)$$

y mediante el uso de la Ley de Gauss, finalmente se llega a la ecuación de continuidad,

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (2.9)$$

que no se verificaría si no hubiera variación de la densidad de flujo eléctrico. Adicionalmente debido a la circulación del campo magnético, éste está definiendo una trayectoria cerrada o una superficie abierta. Si la Ley de Ampere-Maxwell se integra sobre una superficie abierta, se llega a

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{S} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{4\pi}{c} \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.10)$$

en donde se puede observar que $\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ es una corriente eléctrica, que es originada por un movimiento de cargas puntuales en una dirección determinada y local o sea mediante un vector densidad de corriente eléctrica. Hay que hacer claridad que en éste punto se definen las tres corrientes eléctricas de la electrodinámica; la corriente de conducción que se origina en la Ley de Ohm, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, donde σ es la conductividad; la corriente de convección, $\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}_d$, donde ρ es la densidad volumétrica de carga y \mathbf{v}_d es la velocidad de deriva o de arrastre que depende del tipo de conductor por el que se mueven las cargas libres, y la corriente de desplazamiento de Maxwell, $\mathbf{J}_d = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, que se origina con la variación temporal de la densidad de flujo eléctrico.

Usando el Teorema de Stokes, la Ley de Ampere-Maxwell integral es

$$\oint_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{L} = \frac{4\pi}{c} I \quad (2.11)$$

donde la corriente I contiene tanto la Ley de Ohm como la corriente de desplazamiento de Maxwell.

La ley de Faraday-Henry, $\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$, informa que si la densidad de flujo magnético es temporalmente variante, se originará una contracirculación de la intensidad de campo eléctrico alrededor de ésta. Ésta es la base de la Ley de Lenz y del origen de las corrientes parásitas, o corrientes de Eddy. Por tanto una variación temporal del campo eléctrico produce una circulación levógira del campo magnético alrededor de ésta. Realizando una integración sobre una superficie abierta se llega

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t} \quad (2.12)$$

donde utilizando el teorema de Stokes se verifica $\int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = f\mathcal{E}m$ y por tanto,

$$f\mathcal{E}m = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_m}{\partial t}. \quad (2.13)$$

donde f_{em} es la fuerza electromotriz, que no tiene nada que ver con una fuerza pues tiene unidades de voltios, pero se sigue llamando así, aunque no sea correcto, debido a 'razones históricas'. Es de observar que la derivada temporal del flujo magnético en la Ley de Faraday-Henry (ec. (2.12)) afecta tanto al campo como a la sección areal; por tanto,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \int_S \mathbf{B} \cdot d \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (2.14)$$

donde en el primer término del segundo miembro la sección areal es constante y el campo varía temporalmente y en el segundo término el campo es constante y la sección areal varía respecto al tiempo.

Problema: Describa un sistema físico en el cual estén presentes los términos del segundo miembro de la Ley de Faraday-Henry.

Finalmente, la llamada ley de Gauss del magnetismo, $\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ pues $\mu_0 = 1$, muestra que el campo magnético no es divergente y por tanto los polos magnéticos (fuentes magnéticas) libres no existen. Si se analiza en todo el espacio, con un volumen τ ,

$$\int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{B}) d\tau = 0 \quad (2.15)$$

usando el teorema de la divergencia, dicha ley se escribe en su forma integral como

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (2.16)$$

2.0.1. Potenciales Vectoriales

Si se consideran detenidamente las ecuaciones de Maxwell,

$$\begin{aligned} 1) \quad & \nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho, \\ 2) \quad & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \\ 3) \quad & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ 4) \quad & \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

se puede observar en la ley de Gauss del magnetismo (ausencia de monopolos magnéticos libres, Ec. 3) de (2.17)) el hecho de que la divergencia del campo magnético es nula, entonces dicho campo está definido por el rotacional de otro campo al que se da el nombre de potencial magnético,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} = 0 \quad (2.18)$$

ésto es $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Usando de la Ley de Biot-Savart,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (2.19)$$

se nota claramente una analogía con la Ley de Coulomb,

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{x}')(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3 x' \quad (2.20)$$

lo que lleva a dilucidar la forma matemática del potencial vectorial. Éste es

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 x' \quad (2.21)$$

pero dicha definición llevaría a ajustar al potencial en un punto específico del espacio y no en cualquier punto. Por tanto a la ecuación (2.21) se le adiciona el gradiente de una función escalar Ψ , $\nabla \Psi(\mathbf{x})$ de forma tal que se calibre al potencial vectorial de la forma $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A} + \nabla \Psi$, lo que se llama realizar una transformación de gauge en la teoría, y lo que se busca con ésto es demostrar que la teoría es invariante de gauge. También para el potencial escalar se verifica una transformación de gauge análoga, $\Phi \rightarrow \Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$. Si se reemplaza $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ y, adicionalmente se usa la ec. (2.6), en la ecuación 2) de (2.17), se obtiene,

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{1}{c} \frac{\partial(-\nabla \Phi)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.22)$$

donde usando identidades vectoriales se puede modificar a

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \Phi)}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (2.23)$$

pero se observa que hay algo que no funciona, pues si hay campos variantes con el tiempo, la ecuación 4) de (2.17) queda

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.24)$$

por lo que el campo eléctrico queda definido no como la ec. (2.6), sino como $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi$, y por tanto $\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$. Realizando éstos reemplazos en la Ley de Faraday-Henry, se obtiene una ecuación que posee la forma de una ecuación de onda, pero con potenciales acoplados:

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial(\nabla \Phi + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c} \nabla \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \\ \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para desacoplarlos se creó la condición de Lorenz,

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \quad (2.26)$$

quedando la ecuación de onda para el potencial vectorial en presencia de fuentes de campo magnético,

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (2.27)$$

Usando las transformaciones de gauge de los potenciales en la condición de Lorenz,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla \Psi) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi - \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla^2 \Psi - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

se observa que la función escalar Ψ con la que se calibra la electrodinámica, debe cumplir la ecuación de onda

$$\nabla^2 \Psi - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.29)$$

Finalmente reemplazando el valor de la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$ en la Ley de Gauss $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho$,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \left(-\nabla\Phi - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 4\pi\rho \\ \nabla \cdot \nabla\Phi + \nabla \cdot \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} &= -4\pi\rho \\ \nabla^2\Phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho,\end{aligned}\tag{2.30}$$

donde se usó la condición de Lorentz (ec. 2.26). El resultado final es que los potenciales escalar y vectorial se comportan de forma ondulatoria y que las ecuaciones de Maxwell se pueden reescribir en función de éstos, y no de los campos eléctrico y magnético.

Se observa adicionalmente que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} sin presencia de fuentes en el vacío satisfacen la ecuación de onda,

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{E} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \\ \nabla^2\mathbf{B} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}\end{aligned}\tag{2.31}$$

y por tanto usando la teoría de Fourier, el campo eléctrico toma la forma,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left[\tilde{\mathbf{E}}_1(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \tilde{\mathbf{E}}_2(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} \right] d^3k \tag{2.32}$$

y el campo magnético toma una forma similar,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \left[\tilde{\mathbf{B}}_1(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t} + \tilde{\mathbf{B}}_2(-\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+i\omega t} \right] d^3k \tag{2.33}$$

donde $\frac{\omega}{c} = k \equiv |\mathbf{k}|$. siendo \mathbf{k} el número de onda, y donde el caracter ondulatorio de los campos electromagnéticos se hace evidente.

2.0.2. Simetría de las Ecuaciones de Maxwell

A pesar de que éstas ecuaciones (ver ec. (2.1)) nos dan la idea de que la electrodinámica no es simétrica en presencia de cargas, se puede notar que desde el punto de vista energético si existe tal simetría, pues la densidad de

energía electromagnética es $u = (8\pi)^{-1}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H})$, donde es evidente que las densidades de energía eléctrica y magnética son simétricas entre si, lo cual es aún más notorio en la forma matemática que tiene el flujo de radiación $\mathbf{S} = c(4\pi)^{-1}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$.

Si se supone la existencia de fuentes magnéticas, las ecuaciones de Maxwell (ver ec. 2.1) se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi\rho_e & \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_h & -\nabla \times \mathbf{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_h \end{aligned} \quad (2.34)$$

en las cuales es evidente tal simetría, donde se puede observar que aparecen las fuentes magnéticas (polo magnético \mathbf{g} con su densidad de carga magnética asociada ρ_h y la densidad de corriente magnética \mathbf{J}_h). Aunque la motivación primordial que se expone aquí es la simetría, la existencia del monopolos es requerida en las teorías que estudian la estructura de la materia a escalas muy pequeñas (del orden de 10^{-30} m) y para poder experimentar allí, las energías necesarias son tan grandes que no existen aceleradores para hacerlo, lo cual llevó a algunos científicos a trabajar en cosmología, pues en ésta área se encuentran cuerpos y procesos en la naturaleza con mucha energía, tal como explosiones estelares, pulsares, etc., mientras otros buscan el desarrollo teórico de los monopolos, desde el punto de vista de la unificación, teorías de cuerda, o teorías supersimétricas.

Inicialmente Dirac creó el monopolos magnético para cuantizar la carga eléctrica, pero actualmente se aplica a las interacciones fuertes y débiles, a las teorías de gauge abelianas y no-abelianas, también para el estudio de los procesos de confinamiento de quarks en la cromodinámica cuántica (QCD). Actualmente el problema tiene que ver con el estudio de la singularidad intrínseca que tiene la teoría de monopolos de Dirac, o cuerda de Dirac, que al parecer debido a que nunca se ha medido y a que todos los teoremas matemáticos fallan pues sobre la superficie abierta se crea una línea de singularidad, se concluye que hay una falla conceptual en la teoría de Dirac.

Capítulo 3

Relatividad Especial

Debido a que se pensaba en los años 1900 que la luz necesitaba un medio para propagarse, pues el sonido necesitaba un medio para hacerlo, las olas necesitan para propagar su perturbación un medio fluido, etc., los físicos propusieron una substancia que llenaba el espacio, que permitía que la luz se propagara en el vacío, y lo llamaron éter. Las propiedades de éste éter son: no tiene densidad, no tiene alguna propiedad fisico-química u óptica, pero produce un viento cuando la tierra se mueve a través de él, lo que permite determinarlo midiendo la velocidad de la luz en el marco de la tierra en posiciones tales que se puedan cumplir las transformaciones de Galileo para que al recombinar los haces de luz se observen procesos de interferencia. El dispositivo para realizar éste experimento fue llamado interferómetro de Michelson-Morley. Como se mencionó anteriormente se basaron en las transformaciones de Galileo que correlacionaban dos sistemas de coordenadas inerciales bajo la medición de un evento en el espacio; éstas son,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t, \quad t' = t. \quad (3.1)$$

Debido a que los resultados del experimento de Michelson-Morley fueron negativos, aún con luz extraterrestre, el resultado no fue completamente entendido hasta que apareció la teoría de la relatividad especial de Albert Einstein en la cual propuso dos postulados:

Postulado de la relatividad. En éste postulado Einstein dijo que las leyes de la naturaleza y también los experimentos realizados en un marco de referencia inercial específico son invariantes con respecto a cualquier otro marco de referencia inercial.

Constancia de la velocidad de la luz. La velocidad de la luz es independiente del movimiento de la fuente que lo origina.

Einstein se enfrentó a un problema cuando al observar las transformaciones de Galileo (ver ec. 3.1). se dió cuenta que la ecuación temporal era sospechosa, pues pensaba que el tiempo no era invariante entre los sistemas de coordenadas primado y no-primado, por lo que se debían cambiar en lugar de las ecuaciones de Maxwell (ver ec. 2.1) que eran existosas experimentalmente bajo todo punto de vista.

Para aplicar éstos postulados, se crea un experimento en el que existen dos sistemas de referencia inerciales primado (SRP) y no primado (SRNP). El SRNP está estático y el SRP se mueve con velocidad constante, paralelo al eje x en el sentido positivo. Cuando coinciden los dos orígenes, en el SRNP se enciende un foco y la luz se propaga en tres dimensiones a través del espacio. Los dos sistemas verifican las ecuaciones (si se desea profundizar más, consulte los textos de Jackson [6], Landau [7] y Goldstein [9]),

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 &= 0 \\ (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

en donde se usó el segundo postulado en el cual $c = c'$. Debido a la isotropía del espacio y al primer postulado se concluye que las ecuaciones de los dos sistemas deben ser iguales, y que la diferencia entre ellas incide en una constante multiplicativa que marca el cambio de escala entre los marcos de referencia. Por tanto se tiene que,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \lambda_{41} & \lambda_{42} & \lambda_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

debido a la isotropía del espacio $\lambda_{12} = \lambda_{13} = \lambda_{21} = \lambda_{23} = \lambda_{24} = \lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{34} = \lambda_{42} = \lambda_{43} = 0$, y por tanto,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & \lambda_{14} \\ 0 & \lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones deben ser lineales y en $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ deben coincidir. Por tanto $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{33} = \lambda_{44} = 1$, y ahora si se considera el movimiento paralelo al eje x

teniendo en cuenta que debe existir una similitud con las transformaciones de Galileo y por tanto $\lambda_{14} = -v\lambda_{11}$ (ver ec. 3.1) se llega a

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & -v\lambda_{11} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda_{41} & 0 & 0 & \lambda_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}.$$

Reemplazando éstas ecuaciones en la ecuación principal $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 - (ct')^2$ se obtiene

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = [\lambda_{11}(x - vt)]^2 + y^2 + z^2 - [c(\lambda_{41}x + \lambda_{44}t)]^2. \quad (3.3)$$

Al resolver éste sistema de ecuaciones, y con $\beta = \frac{v}{c}$, se llega a las transformaciones de Lorentz (TL),

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \frac{\beta^2}{v}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Problema: Demuestre las ecuaciones (3.4) mediante el uso de la ecuación (3.3).

Usando las notaciones $\beta = \frac{v}{c}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ y $x_0 = ct$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, se reescriben las TL como

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \beta x_1) \\ x'_1 &= \gamma(x_1 - \beta x_0) \\ x'_2 &= x_2 \\ x'_3 &= x_3. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si el SRP se mueve con una velocidad en \mathcal{R}^3 , se puede ver que las ecuaciones se escriben de forma diferente, pues la cantidad β debe ser un vector y

por tanto los productos comunes entre escalares se convierten en productos punto. Para la parte espacial se tiene que,

$$\begin{aligned} x'_1 &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta_1^2\right) x_1 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\beta_1 \beta_2 x_2 + \beta_1 \beta_3 x_3) - \gamma \beta_1 x_0 \\ x'_2 &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta_1^2\right) x_2 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\beta_2 \beta_1 x_1 + \beta_2 \beta_3 x_3) - \gamma \beta_2 x_0 \\ x'_3 &= \left(1 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta_1^2\right) x_3 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\beta_3 \beta_1 x_1 + \beta_3 \beta_2 x_2) - \gamma \beta_3 x_0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

y por tanto al reunir éstas ecuaciones se construye la ecuación vectorial,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} x_0. \quad (3.7)$$

Para la parte temporal,

$$x'_0 = \gamma (x_0 - \beta_1 x_1 - \beta_2 x_2 - \beta_3 x_3) \quad (3.8)$$

que vectorialmente se reescribe, resultando

$$x'_0 = \gamma (x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}). \quad (3.9)$$

Problema: Demuestre las ecuaciones (3.7) y (3.9) mediante el uso de la ecuación (3.5).

Teniendo en cuenta que la relatividad está definida en el espacio-tiempo, se puede escribir un cuatri-vector de la forma $x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3)$, para $\mu = 0, 1, 2, 3$, y usando la métrica $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ tal que

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

donde se verifica que $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = g^2 = I_{4 \times 4}$, y en forma general que $g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu$. Usando las notaciones $\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu}$, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, $\partial^\mu A_\mu = \partial_\mu A^\mu = \frac{\partial A^0}{\partial x^0} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}$, $\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial x^{02}} - \boldsymbol{\nabla}^2$, se construye una transformación relativista entre dos sistemas de coordenadas de la forma, $x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu$, (ésta que es análoga matemáticamente a la transformación de Galileo en la cual $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t$,

solo que en la transformación relativista hay una rotación espacio-temporal, así como una traslación espacio-temporal) la que expresa propiedades que le dan el nombre de Grupo de Poincaré (GP). En el caso de la relatividad especial se toma el caso en el que $a^\mu = 0$. La anterior restricción convierte el GP en el Grupo de Lorentz (GL) que son dos grupos que obedecen el álgebra de Lie, y en donde se usa la condición,

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta g_{\mu\nu} = g_{\alpha\beta}. \quad (3.11)$$

Adicionalmente se verifica que

$$x''^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x'^\nu = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\alpha x^\alpha = \Lambda^\mu{}_\alpha x^\alpha, \quad (3.12)$$

lo que significa que dos transformaciones sucesivas son también transformaciones de Lorentz y por tanto el álgebra es cerrada. La matriz de transformación Λ , o boost de Lorentz, se puede construir usando los postulados fundamentales de la relatividad especial y luego aplicándolos a un sistema tridimensional. Usando $\beta' = \frac{\gamma-1}{\beta^2}$, el boost de Lorentz queda definido por la ecuaciones ya anteriormente demostradas (ver ec. (3.7) y (3.9)):

$$r' = \Lambda r \quad (3.13)$$

donde los vectores r' , y r , son vectores columna definidos por

$$r' = \begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}, \text{ y por } r = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad (3.14)$$

y donde el boost de Lorentz, Λ , se define como

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_1 & -\gamma\beta_2 & -\gamma\beta_3 \\ -\gamma\beta_1 & 1 + \beta'\beta_1^2 & \beta'\beta_1\beta_2 & \beta'\beta_1\beta_3 \\ -\gamma\beta_2 & \beta'\beta_1\beta_2 & 1 + \beta'\beta_2^2 & \beta'\beta_2\beta_3 \\ -\gamma\beta_3 & \beta'\beta_1\beta_3 & \beta'\beta_2\beta_3 & 1 + \beta'\beta_3^2 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Problema: Demuestre la ecuación (3.15).

El tiempo propio de cada sistema, que marca su evolución espacio-temporal y que es el tiempo tal cual se ve en el marco inercial del sistema, está definido

por $d\tau^2 \equiv c^2 dt^2 - dx^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, donde se constata que en otro sistema de referencia primado, el tiempo propio definido por

$$\begin{aligned} d\tau'^2 &= -g_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu = -g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= -g_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta dx^\alpha dx^\beta = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \\ &= d\tau^2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En la anterior ecuación se demuestra adicionalmente que $g_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\beta}$. Si se aislan las partes espaciales y temporales: $dx'^i = \Lambda^i_0 c dt$ y $c dt' = \Lambda^0_0 c dt$ y se dividen entre sí, se llega a

$$\frac{dx'^i}{c dt'} = \frac{\Lambda^i_0}{\Lambda^0_0} = \beta_i \quad (3.17)$$

entonces,

$$\Lambda^i_0 = \beta_i \Lambda^0_0 \quad (3.18)$$

lo que muestra una relación entre la parte espacio-temporal y la parte netamente temporal del GL.

Si en la ecuación (3.11), se imponen los valores $\alpha = \beta = 0$ entonces $\Lambda^\mu_0 \Lambda^\nu_0 g_{\mu\nu} = g_{00} = -1$ donde separando la parte espacial y la temporal la ecuación se transforma a $\sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 - (\Lambda^0_0)^2 = -1$ y usando el resultado hallado anteriormente: $\Lambda^i_0 = \beta_i \Lambda^0_0$, se tiene $(\beta^2 - 1)(\Lambda^0_0)^2 = -1$, que al despejar se obtiene,

$$\Lambda^0_0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma \quad \text{y} \quad \Lambda^i_0 = \beta_i \gamma.$$

También se observa que $\Lambda^\mu_j \Lambda^\nu_j g_{\mu\nu} = 1$, donde siguiendo un procedimiento análogo al anterior resultan las ecuaciones,

$$\begin{aligned} \Lambda^i_j &= \delta_{ij} + \beta_i \beta_j \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \\ \Lambda^0_j &= \gamma \beta_j \end{aligned} \quad (3.19)$$

que sirven para verificar el boost de Lorentz (ver ec. (3.15)). Finalmente se escriben los vectores,

$$\begin{aligned} x'_0 &= \gamma(x_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}) \boldsymbol{\beta} - \gamma \boldsymbol{\beta} x_0, \end{aligned} \quad (3.20)$$

que marcan la estructura general de las transformaciones de Lorentz entre dos sistemas de referencia que se mueven en cualquier dirección.

Problema: Realice un análisis físico de las ecuaciones (3.20) y halle las condiciones físicas para las cuales éstas son relevantes tanto para la velocidad como para la aceleración.

Con éste resumen de la relatividad especial y del grupo de Lorentz, se sientan las bases para poder calcular la invarianza de la carga eléctrica y la covarianza de la electrodinámica en la siguiente sección.

Capítulo 4

Invarianza de la Carga Eléctrica y Covarianza de la Electrodinámica

Esta sección es netamente educacional, y está extraída primordialmente del texto de J. D. Jackson [6] y apoyada en los textos de L. D. Landau [7] y de H. Goldstein [9].

La importancia de hallar ésta invarianza es que ésta demuestra que la electrodinámica y las fuentes electromagnéticas respetan la relatividad especial.

Teniendo en cuenta la fuerza de Lorentz, aplicada a una partícula de carga q ,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{p}}{dt} &= \frac{1}{\gamma} \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{q}{c}(c\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \\ &= \frac{q}{c}(U_0\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B})\end{aligned}\tag{4.1}$$

donde el cuadri-momento está definido por $p^\mu = (p_0 = \frac{E}{c}, \mathbf{p}) = m(U_0 = \gamma c, \mathbf{U} = \gamma \mathbf{v})$, y donde se observa que la parte temporal es proporcional a una energía y transforma según la ec. (3.18).

Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \int_{\text{vol}} \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} d^3x = \int_{\text{vol}} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} d^3x \\ &= \int_q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E} dq = q \mathbf{v} \cdot \mathbf{E}\end{aligned}\tag{4.2}$$

y por tanto, $\frac{dp_0}{dt} = \frac{q}{c} \mathbf{U} \cdot \mathbf{E} = \frac{dE}{dt}$, que en notación tensorial usando $\mathbf{E} \cdot \mathbf{U} = F^{0\mu} U_\mu$, queda como $\frac{dE}{dt} = \frac{q}{c} F^{0\mu} U_\mu$. Considerando la densidad de corriente como $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt}$, y la densidad de carga como $J^0 \equiv \varepsilon_n(\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n))$, donde $\delta(x)$ es la función de distribución delta de Dirac (ver el apéndice 9.1), construimos la cuadri-densidad de corriente $J^\alpha(x) \equiv \sum_n e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt}$, y por tanto la cuadri-divergencia estará dada por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) &= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial x_n^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \\ &= - \sum_n e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= - \frac{\partial \varepsilon(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \end{aligned} \tag{4.3}$$

que en cuatro dimensiones queda como $\frac{\partial J^\alpha}{\partial x^\alpha} \equiv \partial_\alpha J^\alpha = 0$ y de ésta manera la cuadri-corriente es invariante de Lorentz. Ahora definiendo la carga como la parte temporal de la cuadri-densidad de corriente, $Q \equiv \int d^3x J^0(x)$ se puede analizarla en función de todo el espacio como una variación temporal de la forma $\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial J^0(x)}{\partial x^0}$. Usando el teorema de la divergencia se transforma la integral volumétrica a una integral sobre la superficie que encierra el volumen: $\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}(x) = 0$, la que se anula. En cuatro dimensiones ésta carga queda como $Q = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(\eta_\beta x^\beta)$ donde $\theta(x)$ es la función escalón o de Heaviside definida por

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

y η_β se define como $\eta_1 \equiv \eta_2 \equiv \eta_3 \equiv 0$, $\eta_0 \equiv +1$. Realizando una transformación de Lorentz sobre Q resulta $Q' = \int d^4x J^\alpha(x) \partial_\alpha \theta(\eta'_\beta x^\beta)$ y por tanto $\eta'_\beta = \Lambda^\alpha_\beta \eta_\alpha$. Si se calcula la diferencia entre las cargas transformadas mediante la TL, se obtiene $(Q' - Q) = (Q' - Q)(\theta(\eta'_\beta x^\beta) - \theta(\eta_\beta x^\beta)) = 0$ pues la cuadri-densidad de corriente J^α tiende a cero cuando $|x|$ tiende a infinito y $\theta(\eta'_\beta x^\beta) - \theta(\eta_\beta x^\beta)$ tiende a cero cuando el tiempo tiende a infinito con x fijo. Por tanto Q es un escalar y es entonces invariante bajo cualquier transformación.

Las ecuaciones de onda para los potenciales \mathbf{A} y Φ , están dadas por,

$$\begin{aligned}\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi \mathbf{J}}{c} \\ \nabla^2 \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= -4\pi \rho\end{aligned}\quad (4.4)$$

restringidas por la condición de Lorentz,

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (4.5)$$

y cuyas soluciones tienen la forma de Fourier,

$$\begin{aligned}f(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega f_{\omega}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ f_{\omega}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt f(\mathbf{r}, t) e^{i\omega t}\end{aligned}\quad (4.6)$$

Si se define el cuadri-potencial $A^\alpha = (\Phi, \mathbf{A}) = (A^0, A^i)$, (para $i = 1, 2, 3$), las ecuaciones de onda se mezclan dando como resultado,

$$\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha \quad \text{y} \quad \partial_\alpha A^\alpha = 0. \quad (4.7)$$

En la electrodinámica los campos se definen mediante los potenciales de la manera usual,

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \Phi \\ \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}\end{aligned}\quad (4.8)$$

que en forma de componentes quedan,

$$\begin{aligned}E_i &= -\frac{1}{c} \frac{\partial A_i}{\partial x_0} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = -(\partial^0 A^i - \partial^i A^0) \\ B_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = -(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2)\end{aligned}\quad (4.9)$$

donde se tuvo en cuenta que $\partial^\alpha = (\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla)$. Con la anterior notación se escribe el tensor electromagnético $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$,

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde el tensor electromagnético totalmente covariante está descrito como

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} F^{\alpha\beta} g_{\beta\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Problema: Demuestre las ecuaciones (4.10) y (4.11).

Así, queda definida la transformación entre tensores $F^{\mu\nu} \xrightarrow{\mathbf{E} \rightarrow -\mathbf{E}} F_{\mu\nu}$, definidos en el espacio normal. En el espacio dual también se define el tensor electromagnético dual

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta} F_{\gamma\delta} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el tensor $\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$ está definido como,

$$\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = \begin{cases} +1 & \text{para } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0, 1, 2, 3) \\ & \text{permutación par} \\ -1 & \text{para cualquier perm. impar} \\ 0 & \text{cualquiera de índices son iguales} \end{cases}$$

con la propiedad $\varepsilon_{\mu\nu\gamma\delta} = -\varepsilon^{\mu\nu\gamma\delta}$.

Dos de las Ecuaciones de Maxwell (Ec. 2.1) son

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_i}{\partial x_i} &= 4\pi\rho = \frac{4\pi}{c}c\rho = \frac{4\pi}{c}J_0 \\ \varepsilon_{ijk} \nabla H_k - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial x_0} &= \frac{4\pi}{c}J_i, \end{aligned} \quad (4.12)$$

las cuales se pueden unir resultando,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \nabla H_k - \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial x_0} - \frac{\partial E_i}{\partial x_i} &= \frac{4\pi}{c}J_\alpha \\ \therefore \quad \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -\frac{4\pi}{c}J^\beta \end{aligned} \quad (4.13)$$

Las restantes ecuaciones de Maxwell son,

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial x_0} &= 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

quedando,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial E_k}{\partial x_j} + \frac{1}{c} \frac{\partial B_i}{\partial x_0} - \frac{\partial B_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \therefore \partial_\alpha \mathcal{F}^{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Finalmente las cuatro ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en función del tensor electromagnético de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \partial_\alpha F^{\beta\gamma} + \partial_\beta F^{\gamma\alpha} + \partial_\gamma F^{\alpha\beta} &= 0 \\ \partial_\alpha F^{\alpha\beta} &= -\frac{4\pi}{c} J^\beta \end{aligned} \quad (4.16)$$

en donde se demuestra la ecuación vista anteriormente, $\square A^\alpha = -\frac{4\pi}{c} J^\alpha$ con la ecuación de continuidad $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ y de ésta manera queda definida la covarianza del electromagnetismo. Con la covarianza de los campos electromagnéticos, éstos transforman mediante las relaciones,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= \gamma(\mathbf{E} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{E}) \\ \mathbf{B}' &= \gamma(\mathbf{B} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}) - \frac{\gamma^2}{\gamma + 1} \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{B}). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Problema: Si $v \ll c$ y $v \simeq c$ entonces qué pasa con las ecuaciones (4.17)?; explique tanto matemática como físicamente.

Problema: Si $v = c$ en la ecuación (4.17), qué significa para los campos electromagnéticos?.

Capítulo 5

Radiación Electromagnética

El potencial escalar está definido por,

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right) \quad (5.1)$$

donde la contribución para el monopolo eléctrico se obtiene reemplazando $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| = |\mathbf{x}| = r$, resultando,

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3x' \int dt' \frac{\rho(\mathbf{x}', t)}{r} \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) \\ &= \frac{1}{r} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}', t) \int dt' \delta\left(t' + \frac{r}{c} - t\right) \\ &= \frac{1}{r} \int d^3x' \rho\left(\mathbf{x}', t' = t - \frac{r}{c}\right) \\ &= \frac{q(t' = t - \frac{r}{c})}{r} \end{aligned} \quad (5.2)$$

pero al ser escalar, la contribución solo es ésta. Para el potencial vectorial, bajo el gauge de Lorentz, está definido por (si desea desarrollar las ecuaciones en el sistema MKS o SI, deberá introducir un factor $\frac{4\pi}{c}$ ó $\frac{\mu_0 c}{4\pi}$, según sea el caso),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{c} \int d^3x' \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}', t')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \cdot \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right) \quad (5.3)$$

donde el delta de Dirac hace que los campos no se propagen instantáneamente y por tanto se conviertan en campos retardados. Pero se observa que las

fuentes varían en el tiempo sinusoidalmente de la forma $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ y $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{-i\omega t}$ y por tanto el potencial vectorial (Ec. (5.3)) se modifica como,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int d^3x \int dt' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')e^{-i\omega t'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \int dt' e^{-i\omega t'} \delta\left(t' + \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{c} - t\right) \\ &= \frac{1}{c} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{i\frac{\omega}{c}|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{c} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Si la longitud de onda es $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$, y si las dimensiones de la fuente de radiación son mucho menores $d \ll \lambda$, entonces se definen tres zonas espaciales que definen la *zona cercana o estática* para $d \ll r \ll \lambda$, la *zona intermedia o de inducción* para $d \ll r \sim \lambda$, y la *zona lejana o de radiación* para $d \ll \lambda \ll r$. Usando (ver Apéndice 9.3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \\ &= 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{2l+1} \frac{r'^l}{r^{l+1}} |Y_{lm}(\theta, \phi)|^2 \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde $\frac{r'^l}{r^{l+1}} = \sum_{m=-l}^l Y_{lm}(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)$ ([24], [23]), para la zona cercana $kr \ll 1$ y por tanto al analizar el límite cuando $kr \rightarrow 0$, la exponencial tiende al valor unitario y así, usando (5.5) y los datos del Apéndice 9.3, el potencial vectorial (5.4) es,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{4\pi}{2l+1} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}} \cdot \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') r'^l Y_{lm}(\theta', \phi') \quad (5.6)$$

mostrando que en la zona cercana los campos son casi-estacionarios.

Problema: Use el apéndice 9.3 y demuestre la ecuación (5.6)

En la zona de radiación donde $kr \gg 1$, la exponencial de la ecuación (5.5) oscila con gran magnitud, dando las características propias del potencial y de

los campos de radiación. Por tanto en el límite cuando $kr \rightarrow \infty$, se verifica $r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}' = r \left(1 - \frac{\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'}{r} = r\right)$, y por tanto el potencial vectorial (5.4) es,

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{1}{c} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') \frac{e^{ik(r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}')}}{r - \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \frac{1}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') e^{-i\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}'} \\ &= \frac{e^{ikr}}{cr} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}') (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x}')^n \end{aligned} \quad (5.7)$$

lo anterior debido a que $d \ll \lambda$ y por tanto se expande en términos de k . Si se tiene en cuenta solamente el primer término, el potencial vectorial es $\mathbf{A} = \frac{e^{ikr}}{cr} \int d^3x' \mathbf{J}(\mathbf{x}')$, donde usando las propiedades de la derivada convectiva y de las soluciones fasoriales ($\frac{\partial}{\partial t} = i\omega$), que reescriben la ecuación de continuidad como $\nabla \cdot \mathbf{J} = i\omega\rho$ y por tanto el potencial vectorial queda como $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -i\frac{\omega}{c} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}')$. Usando la definición del momento dipolar eléctrico $\mathbf{p} = q\mathbf{d} = \int d^3x' \mathbf{x}' \rho(\mathbf{x}')$ y la definición del número de onda $k = \frac{\omega}{c}$, el potencial finalmente toma la forma,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = -ik\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r}. \quad (5.8)$$

Finalmente los campos del dipolo eléctrico son,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left(-ik\mathbf{p} \frac{e^{ikr}}{r} \right) \\ &= k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right) \end{aligned} \quad (5.9)$$

y el campo eléctrico

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{ic}{\omega} \nabla \times \mathbf{B} = ik \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &= \frac{k^2 e^{ikr}}{r} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{n}} + [3\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}] \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2} \right) e^{ikr} \end{aligned} \quad (5.10)$$

donde en la zona estática cuando se toma el $\lim_{kr \rightarrow 0}$ y así $\frac{e^{ikr}}{r} \rightarrow 0$, $(1 - \frac{1}{ikr}) \rightarrow \frac{i}{kr}$, $k^2 \rightarrow 0$ y $e^{ikr} (\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}) = \frac{e^{ikr}}{r^3} (1 - ikr) \rightarrow \frac{1}{r^3}$, quedando los campos como,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{i}{kr} = \frac{ik}{r^2} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \\ \mathbf{E} &= \frac{1}{r^3} [3\hat{\mathbf{n}}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}], \end{aligned} \quad (5.11)$$

mientras que en la zona de radiación cuando se toma el $\lim_{kr \rightarrow \infty}$ y por tanto $\frac{e^{ikr}}{r}$ se conserva, pues decaen más o menos igual, mientras que $\frac{1}{ikr} \rightarrow 0$ y $(\frac{1}{r^3} - \frac{ik}{r^2}) \rightarrow 0$, toman la forma,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \\ \mathbf{E} &= \left[k^2 (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \times \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{B} \times \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (5.12)$$

El vector de Poynting, que define la potencia radiada, está dado por $\mathbf{S} = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^*$, pero lo que se necesita es calcular la potencia radiada per angulo sólido unitario debida a la oscilación del momento dipolar $\frac{dP}{d\Omega}$, se proyecta el vector de Poynting al vector unitario en dirección de r, $\hat{\mathbf{n}}$ por r^2 que marca la característica del cambio de espacio, resultando,

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Omega} &= \frac{r^2 c}{8\pi} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \\ &= \frac{k^4 c}{8\pi} \hat{\mathbf{n}} \cdot [(\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{n}}] \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \\ &= \frac{k^4 c}{8\pi} [\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}] \times \hat{\mathbf{n}}^2 \\ &= \frac{k^4 c}{8\pi} |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p} \sin \theta|^2 = \frac{k^4 c}{8\pi} |\mathbf{p}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned} \quad (5.13)$$

donde resolviendo para el ángulo sólido se obtiene la potencia radiada total $P = \frac{k^4 c}{3} |\mathbf{p}|^2$.

Capítulo 6

Monopolos Magnéticos

Si se analizan las ecuaciones de Maxwell (EMx) (ver ec. (2.1)), se puede observar que éstas se dividen en macroscópicas (EMM) y microscópicas (EMm). Las EMm describen la electrodinámica que es válida para variaciones espacio-temporales arbitrarias del campo electromagnético acoplado, donde las fuentes describen todas las posibilidades; esto es: cargas puntuales, polarizaciones, corrientes a nivel atómico, etc., en otras palabras describen el marco para distribuciones de fuentes y campos arbitrarios a escalas macroscópicas y microscópicas. Las EMM están definidas exclusivamente en cuerpos macroscópicos y por tanto para una correcta descripción electrodinámica de éstos, se definen unos nuevos campos llamados la densidad de flujo eléctrico, o desplazamiento eléctrico \mathbf{D} y la intensidad de campo magnético o campo magnetizante \mathbf{H} , siendo ambos originados de relaciones no-lineales, por lo general dificultosas de analizar, de los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} , las variables espacial, \mathbf{r} , y el tiempo, t . En general se ha enseñado en los textos promedio que las relaciones entre las EMM y las EMm son tan sencillas como $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{H} = \mu^{-1} \mathbf{B}$, pues el tratamiento de dichas cantidades se realiza en el vacío, lo que está muy por fuera de la realidad, pues en general éstas supuestas constantes llamadas permitividad ε y permeabilidad μ se analizan dentro de materiales para visualizar las susceptibilidades eléctrica y magnética de éstos, resultando variables tensoriales de la forma,

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mu = \begin{pmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

Se puede ver una falta de simetría en las EMx, que se puede solucionar

si se suprimen las fuentes y por tanto la teoría electromagnética descrita se hace en ausencia de fuentes mediante las ecuaciones,

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \tag{6.2}$$

donde la simetría buscada se logra pero con la consecuencia de perder las fuentes, lo que es un problema grave pues si se quiere describir correctamente la naturaleza, las fuentes deben existir. Por tanto se debe establecer la simetría en presencia de fuentes, lo cual se intentó realizar casi desde la época de Maxwell, sin creer mucho en que las ecuaciones resultantes describirían algo en la naturaleza, sino que solo se verían simétricas matemáticamente. Posteriormente debido a Paul Dirac con sus famosos artículos acerca del polo magnético [1], [10] y Cap. 7, en los que definió al monopolito magnético como condicionante necesario para cuantizar a la carga eléctrica, con el inconveniente de que resultaron divergencias diametralmente opuestas que definían una cuerda de divergencia, a la que se le dió el nombre de cuerda de Dirac, con la que algunos autores no están de acuerdo pues no se ha medido algo parecido en la naturaleza. Más recientemente, entre muchas investigaciones, algunos de los artículos que evidencian una dualidad electromagnética, [12], [13], [14], [15], [16], [11], la relacionan desde el punto de vista topológico, aún teniendo en cuenta la cuerda de Dirac, e incluyendo teorías de gran unificación como teorías de cuerdas o supercuerdas, y comportamientos no lineales como solitones o instantones.

Para definir clásicamente al monopolito magnético, se realizan unas transformaciones entre los campos electromagnéticos (sin fuentes), cambiando \mathbf{B} por $-\mathbf{E}$ y \mathbf{E} por \mathbf{B} , de la siguiente forma,

$$\left. \begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \right\} \begin{matrix} \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E} \end{matrix} \left\{ \begin{aligned}
\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\
\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= 0 \\
\nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= 0
\end{aligned} \right. \tag{6.3}$$

Lo que no es natural, como se mencionó anteriormente. Si tal simetría no existiera entonces por ejemplo si hubieran habido dos campos \mathbf{E}_1 y \mathbf{B}_1 y se utilizaran otros campos $\mathbf{E}_2 = \mathbf{B}$ y $\mathbf{B}_2 = -\mathbf{E}$, como una nueva teoría, al analizar la energía de las dos teorías, se tendría que

$$\frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}_1|^2 + \frac{1}{8\pi}|\mathbf{B}_1|^2 \neq \frac{1}{8\pi}|\mathbf{E}_2|^2 + \frac{1}{8\pi}|\mathbf{B}_2|^2$$

y por tanto se verificaría que las cargas magnéticas no existen. Para mantener la dualidad electromagnética se deben verificar las transformaciones en presencia de fuentes, en donde se puede observar que $\mathbf{E} \rightarrow c\mathbf{B}$, $c\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, $c\mathbf{J}_e \rightarrow \mathbf{J}_h$, $\mathbf{J}_h \rightarrow -\mathbf{J}_e$, $c\rho_e \rightarrow \rho_h$ y $\rho_h \rightarrow -c\rho_e$, lo que marca transformaciones generales entre campos y fuentes electromagnéticas. Finalmente se tiene que dichas transformaciones llevan a las siguientes ecuaciones,

$$\left. \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho_e \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_h \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_h \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_e \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \mathbf{E} &\rightarrow \mathbf{B} \\ \mathbf{B} &\rightarrow -\mathbf{E} \\ (\rho_e, \mathbf{J}_e) &\rightarrow (\rho_h, \mathbf{J}_h) \\ (\rho_h, \mathbf{J}_h) &\rightarrow -(\rho_e, \mathbf{J}_e) \end{aligned} \left\{ \begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 4\pi\rho_h \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= -4\pi\rho_e \\ \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_e \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_h \end{aligned} \right. \quad (6.4)$$

Se infiere que en el espacio 'normal' en el cual, en las ordenadas positivas está el campo \mathbf{E} , en las ordenadas negativas el campo $-\mathbf{E}$, en las abscisas positivas el campo \mathbf{B} y en las abscisas negativas el campo $-\mathbf{B}$, puede ser rotado una cantidad $\frac{\pi}{2}$ en contra de las manecillas del reloj, dando como resultado el espacio dual en el que en las ordenadas positivas está el campo $\tilde{\mathbf{E}}$, en las ordenadas negativas el campo $-\tilde{\mathbf{E}}$, en las abscisas positivas el campo $\tilde{\mathbf{B}}$ y en las abscisas negativas el campo $-\tilde{\mathbf{B}}$. Resumiendo éstos pasos, se verifican las transformaciones,

$$\tilde{\mathbf{B}} = -\mathbf{E} \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \quad (6.5)$$

Igualmente se realiza esta rotación a las fuentes electromagnéticas resultando las transformaciones,

$$\tilde{\rho}_m = -\rho_e \quad \tilde{\rho}_e = \rho_h. \quad (6.6)$$

Tradicionalmente se define el campo magnético mediante potencial vectorial usando la relación,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0,$$

lo cual es desafortunado, pues dicha ecuación niega al monopolo magnético, pues las líneas de campo ni convergen, ni divergen. Pero el potencial vectorial \mathbf{A} es necesario para la descripción mecánico-cuántica de la electrodinámica, por tanto no se puede prescindir de él. Por tanto en un volumen τ se debe verificar usando el teorema de la divergencia,

$$\int_{\tau} \nabla \cdot \mathbf{B} d\tau = 4\pi g = \oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.7)$$

y por ésta razón el campo magnético debe estar definido por la ecuación $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\chi}$, donde $\boldsymbol{\chi}$ es un campo que evita que no existan los polos magnéticos y de ésta manera

$$\begin{aligned} \int_{\tau} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} d\tau + \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} d\tau &= 4\pi g \\ \int_{\tau} \nabla \cdot \boldsymbol{\chi} d\tau &= 4\pi g. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Ésta función, debe ser infinita en un punto y cero en cualquier otro lugar, para sostener la idea de una carga puntual en el espacio. Como podemos ver ésta es una característica típica de la función de distribución delta de Dirac (ver apéndice 9.1).

Si el volumen se escoge arbitrariamente, entonces $\boldsymbol{\chi}$ debe ser infinita en un punto de la superficie cerrada por el volumen formando una línea infinita que conecta al monopolo. Ésta se llama la cuerda de Dirac, y debido a sus características, el campo $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} + \boldsymbol{\chi}$ tendería a una singularidad, por lo que el potencial vectorial \mathbf{A} debe compensar la singularidad en los alrededores de la cuerda de Dirac y debido a ésto no puede ser definido en cualquier punto del espacio.

Hasta aquí todo parece correcto, pero el teorema de decomposición de Helmholtz dice que cualquier campo vectorial que sea lo suficientemente suave y rápidamente decaiente, se puede descomponer en un campo vectorial irrotacional (sin circulación) y en un campo vectorial solenoidal (sin divergencia) de la forma,

$$\mathbf{T} = -\nabla \mathcal{T}(\nabla \cdot \mathbf{T}) + \nabla \times \mathcal{T}(\nabla \times \mathbf{T}) \quad (6.9)$$

donde se observa que si el campo es solenoidal, se recupera $\mathbf{T} = \nabla \times \mathcal{T}(\nabla \times \mathbf{T}) = \nabla \times \mathbf{U}$, y si el campo es irrotacional se obtiene $\mathbf{T} = -\nabla \mathcal{T}(\nabla \cdot \mathbf{T}) = -\nabla \mathcal{U}$.

Específicamente para la electrodinámica el campo magnético se escribirá como, $\mathbf{B} = -\nabla\Phi + \nabla \times \mathbf{A}$, lo que es válido solamente si $\nabla \cdot \mathbf{B}$ y $\nabla \times \mathbf{B}$ tienden a cero más rápido que r^{-2} cuando $r \rightarrow \infty$, y si \mathbf{B} tiende a cero cuando $r \rightarrow \infty$. De ésta manera \mathbf{A} y Φ son,

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \\ \Phi &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\nabla \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'\end{aligned}\quad (6.10)$$

Problema: Explique por qué las ecuaciones (6.10) son las formas correctas?. Es simplemente una solución matemática?. Existen más posibilidades físicamente admisibles?

Entonces se definen $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{x})$ y $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ pues si el campo magnético está definido mediante un polo, éste debe tener la forma matemática idéntica a la del polo eléctrico, $\mathbf{B} = q_h r^{-2} \hat{r}$, y por tanto éste es irrotacional, lo que nos lleva a que el campo magnético esté definido por $\mathbf{B} = -\nabla\Phi$ y por tanto para el polo magnético $\mathbf{A} = 0$, pues si existiera, violaría el teorema de descomposición de Helmholtz, ver ec. 6.9, y así aparece una línea de discontinuidad. Sinembargo el uso de $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi\rho_h$ indica que no es correcto utilizar el potencial \mathbf{A} . Adicionalmente la carga magnética se debe considerar como una distribución y por tanto la ecuación correcta debe ser $\nabla \cdot \mathbf{B} = 4\pi q_h \delta^{(3)}(\mathbf{x})$. Si se escoge la existencia del potencial vectorial, entonces habrá una singularidad que no es necesariamente recta.

Usando el teorema de Stokes,

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{L} = \int_S \boldsymbol{\alpha} \cdot d\mathbf{S} \quad (6.11)$$

donde $\boldsymbol{\alpha} = \nabla \times \mathbf{V}$. Si se considera un flujo magnético, debido a un polo de la forma usual, entonces se observa que $\psi(r, \theta) = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 2\pi q_h (1 - \cos \theta) = \oint_C \mathbf{A}' \cdot d\mathbf{L}$. Para que la definición del campo magnético, $\nabla \times \mathbf{A}'$, sea correcta sobre una superficie, ésta no puede ser cualquiera debido a la línea de singularidad. Así las posibles definiciones correctas del campo deben ser,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \frac{q_h(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad \text{para } \theta < \pi - \varepsilon \\ \mathbf{A}'' &= -\frac{q_h(1 + \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi} \quad \text{para } \theta > \varepsilon\end{aligned}\quad (6.12)$$

donde \mathbf{A}' y \mathbf{A}'' están definidos de forma tal que evitan la singularidad de Dirac. \mathbf{A}' alrededor del eje negativo de las z , y \mathbf{A}'' en cualquier punto del espacio, con excepción de $\theta = \varepsilon$ alrededor del eje positivo de las z . Los anteriores campos no serían potenciales vectoriales, sino campos vectoriales sin una definición física clara. El origen de éstas ecuaciones se fundamenta en el análisis del campo de un solenoide largo y delgado. Ver Apéndice (9.5). Con el objetivo de aclarar un poco más la teoría del monopolo magnético, se construye un campo magnético Coulombiano de la forma,

$$\mathbf{B} = q_h \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (6.13)$$

y por tanto una partícula con carga eléctrica q_e en dicho campo sufre una fuerza magnética, $\mathbf{F}_m = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, de la forma,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_e q_h}{r^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \quad (6.14)$$

Suponiendo que la energía se conserva y solo es de movimiento, se puede proyectar la ec. (6.14) en la trayectoria para analizar la órbita seguida por la carga eléctrica dentro del campo del polo magnético

$$\mathbf{r} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_e q_h}{mr^3} \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right) = \frac{q_e q_h}{mr^3} \mathbf{r} \cdot \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{r}) = 0 \quad (6.15)$$

pero

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} r^2 - v^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

donde se usaron los resultados anteriores para la última igualdad. Debido a que la potencia es nula se verifica la ecuación $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = 0$ que al resolverla (definiendo $b^2 \equiv 2Ct$ con C como la primera constante de integración y la segunda cero para $t = 0$) resulta la ecuación $r = \sqrt{v^2 t^2 + b^2}$, que informa acerca del radio seguido por la partícula cargada, el cual no es cerrado en el sistema monopolar, sino que la cargas caen hacia el monopolo hasta una distancia mínima b , y luego es reflejado hasta el infinito.

Desde el punto de vista del momento angular $\mathbf{L}' = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, se

puede observar que

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}'}{dt} &= m \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \mathbf{r} \times m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{r} \times \left[\frac{q_e q_h}{r^3} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \right] \\ &= \frac{q_e q_h}{mr^3} \left[m\mathbf{r} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{r} \right) \right] = \frac{q_e q_h}{mr^3} \left[\left(\mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{r} \right] = \frac{q_e q_h}{mr^3} (\mathbf{L}' \times \mathbf{r})\end{aligned}\quad (6.17)$$

donde se verifica que $\frac{d\mathbf{L}'}{dt} \cdot \mathbf{L}' = 0$ y por tanto $\frac{dL'}{dt} = 0$ y que la magnitud del momento angular es $L' = m v b$.

Si se analiza con un problema ordinario de Coulomb se observa que en éste problema el momento angular no es constante, como si lo es en un problema de tipo Coulomb. Modificando $\mathbf{L}' \times \mathbf{r}$ como,

$$\begin{aligned}\left(m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \times \mathbf{r} &= m (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m \left(\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) \mathbf{r} = mr \left(r \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{dr}{dt} \mathbf{r} \right) \\ &= mr^3 \left(\frac{r \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \frac{dr}{dt} \mathbf{r}}{r^2} \right) = mr^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)\end{aligned}\quad (6.18)$$

en la ec. (6.17), se llega a

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{L}'}{dt} - \frac{q_e q_h}{mr^3} mr^3 \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\mathbf{L}' - q_e q_h \frac{\mathbf{r}}{r} \right) &= \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0\end{aligned}\quad (6.19)$$

y por tanto,

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}' - q_e q_h \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{L}' - q_e q_h \hat{\mathbf{r}} \quad (6.20)$$

cuya magnitud es [22],

$$L^2 = \mathbf{L}'^2 - q_e^2 q_h^2 = (m v b)^2 + (q_e q_h)^2, \quad (6.21)$$

resultando que la aparición de un término adicional en la definición del momento angular genera una contribución no-trivial de campo.

Como el vector de Poynting, $\mathbf{S} = \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$, tiene dimensiones de potencia por unidad de superficie, entonces el momento angular del campo eléctrico de una carga eléctrica puntual cuya posición definida por un radio vector \mathbf{r}

y el campo magnético de un monopolo, está definido por,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_{qe qh} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' [\mathbf{r}' \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] = \frac{q_h}{4\pi} \int d^3 r' \left[\mathbf{r}' \times \left(\mathbf{E} \times \frac{\mathbf{r}'}{r'^3} \right) \right] \\ &= \frac{q_h}{4\pi} \int d^3 r' \left[\frac{\mathbf{E}}{r'^2} - \frac{\hat{\mathbf{r}}' \cdot \mathbf{E}}{r'} \hat{\mathbf{r}}' \right]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Al integrar el primer término se observa que para un volumen que incluya el comportamiento de todo el sistema, ésta se anula. La segunda integral se integra por partes resultando,

$$\mathbf{L}'_{qe qh} = -\frac{q_h}{4\pi} \int d^3 r' (\nabla' \cdot \mathbf{E}) \hat{\mathbf{r}}'. \quad (6.23)$$

Finalmente usando $\nabla' \cdot \mathbf{E} = 4\pi q_e \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$, se obtiene,

$$\mathbf{L}'_{qe qh} = -q_e q_h \hat{\mathbf{r}}', \quad (6.24)$$

resultando que el valor del momento angular no es nulo aún en un sistema estático: carga eléctrica-monopolo magnético.

Si se definen los campos como $\mathbf{E} = q_{e1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}(q_{e2})$ y $\mathbf{B} = q_{h1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{B}(q_{h2})$ para un sistema de pares de cargas (eléctrica-magnética), llamado diones (d), entonces el momento angular se dicho sistema es,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}'_{dd} &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' [\mathbf{r}' \times (\mathbf{E} \times \mathbf{B})] \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \mathbf{r}' \times \left[\left(q_{e1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{E}(q_{e2}) \right) \left(q_{h1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \mathbf{B}(q_{h2}) \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \left\{ \mathbf{r}' \times \left[q_{e1} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \mathbf{B}(q_{h2}) + q_{h1} \mathbf{E}(q_{e2}) \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.25)$$

donde integrando de igual manera que en el caso anterior resulta un valor no nulo, $\mathbf{L}'_{dd} = (q_{e1} q_{h2} - q_{h1} q_{e2}) \hat{\mathbf{r}}$.

Si el sistema de cargas se acerca, éste sufre una dispersión del tipo Rutherford de la forma [22], [6], [9],

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\Theta^4} \left(\frac{2q_e q_h}{mv} \right)^2 \quad (6.26)$$

Explique por qué es una dispersión de ésta clase?.
 Compárela con la dispersión de Rutherford exacta. A
 cuáles conclusiones llega?.

Todos los resultados anteriores muestran que el comportamiento físico de los monopolos es muy similar a lo que se observa en la naturaleza, y por tanto no es una incoherencia su descripción.

Para analizar el potencial vectorial de un campo monopolar se usan consideraciones de simetría. Se supone que el campo magnético se comporta de igual manera a la ley de Coulomb, y por tanto la Lagrangiana del sistema está definida por $L = \frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + q_e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}$. Aplicándole las ecuaciones de Euler-Lagrange $\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} = 0$, se obtiene la ecuación de movimiento

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{q_e q_h}{r^3} \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{r}, \quad (6.27)$$

donde el campo magnético se ha tomado como si fuera del tipo Coulombiano; ésto es, $\mathbf{B} = q_h \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \nabla \cdot \mathbf{A}$. Pero si se considera el campo magnético esféricamente simétrico, el potencial vectorial correspondiente sería $\mathbf{A} = A(\theta)\nabla\phi$, donde usando la definición del campo vectorial de la ec. (6.12), se elige la función $A(\theta)$ como $-q_h(1+\cos\theta)$, y por tanto después de calcular el gradiente $\nabla\phi = (r\sin\theta)^{-1}(-\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}})$ se obtiene el campo vectorial,

$$\mathbf{A} = \frac{q_h(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}(\sin\phi\hat{\mathbf{x}} - \cos\phi\hat{\mathbf{y}}); \quad (6.28)$$

en éste cálculo se ha usado la transformación de coordenadas esféricas, $\hat{\phi} = -\sin\phi\hat{\mathbf{x}} + \cos\phi\hat{\mathbf{y}}$. Finalmente se puede escribir el campo vectorial de la forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{q_h}{r} \frac{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}{r - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \quad (6.29)$$

donde el vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ está dirigido hacia el eje z. Calculando el rotacional de éste campo se obtiene,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \left[\frac{q_h}{r} \frac{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}{r - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right] = g \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \quad (6.30)$$

lo que comprueba que el campo \mathbf{A} obedece la forma de los campos de Coulomb o sea que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

(r). También se observa que el caracter vectorial del campo vectorial desaparece. Sin embargo para $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ la ec. (6.28) se anula o marca una singularidad. A esto se le llama una línea semi-infinita de singularidad. Una posible solución a éste problema es reescribir el potencial vectorial como

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = (1 + \cos \theta) \frac{i}{q_e} U^{-1} \nabla U \quad (6.31)$$

donde $U = e^{-iq_e q_h \varphi}$. De ésta forma el potencial es una transformación de gauge pura, la cual es singular y está complementada por un factor con dependencia polar.

Analizando la vecindad de \mathbf{r} , bajo un intervalo ε ($R^2 = r^2 + \varepsilon^2$), el potencial vectorial se puede escribir como,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{q_h}{R} \frac{\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{n}}}{R - \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{n}}}, \quad (6.32)$$

que en el límite cuando $\varepsilon^2 \rightarrow 0$, se obtiene el campo magnético

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = q_h \frac{\mathbf{r}}{r^3} - 4q_h \pi \hat{\mathbf{n}} \theta(z) \delta(x) \delta(y) \quad (6.33)$$

que resuelve todos los problemas con las ecuaciones de Maxwell (ec. (2.1)).

6.0.3. Teoría del Monopolo sin Cuerdas de Dirac

Se esperaría que la teoría de monopolos y campos debería tomar una forma que es completamente dual a la teoría de cargas y campos y adicionalmente los campos electromagnéticos de un sistema de monopolos y los de un sistema de cargas deberían tener propiedades dinámicas idénticas, pero éstas propiedades deseables no se sostienen simultaneamente [18], [19].

Las ecuaciones de Maxwell son $\frac{\partial F_{(e)}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi J_{(e)}^\mu$ y $\frac{\partial F_{(e)}^{*\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$, con la fuerza de Lorentz dada por $ma_{(e)}^\mu = q_e F_{(e)}^{\mu\nu} v_\nu$, donde m es la masa en reposo de la partícula y v_ν es su cuadri-velocidad. Todos los campos son derivados desde un cuadri-potencial regular mediante la ecuación, $F_{(e)\mu\nu} = \frac{\partial A_{(e)\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_{(e)\mu}}{\partial x^\nu}$, donde el cuadri-potencial $A_{(e)\alpha}$ como generador de los campos cumple una importancia fundamental en la dinámica del sistema tal que forma la Lagrangiana de interacción, $\mathcal{L}_{\text{int}} = -J_{(e)}^\mu A_{(e)\mu}$. Intentando construir una teoría dual de la forma, $\frac{\partial F_{(m)}^{*\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi J_{(m)}^\mu$ y $\frac{\partial F_{(m)}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = 0$, con la fuerza de Lorentz

$ma_{(m)}^\mu = q_m F_{(m)}^{*\mu\nu} v_\nu$. Sus campos se derivan de cuadri-potenciales mediante $F_{(m)\mu\nu}^* = \frac{\partial A_{(m)\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_{(m)\mu}}{\partial x^\nu}$. Teniendo en cuenta un potencial vectorial de la forma, (ver Cap. 5), $\mathbf{A}_{(e)} = -iAe^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{i}}$, los campos están definidos por

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{(e)}}{\partial t} = \omega A e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{i}} \quad (6.34)$$

y

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}_{(e)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ -iAe^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega A e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Con el monopolio magnético el potencial dual se define de igual forma, como $\mathbf{A}_{(m)} = -iAe^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{j}}$, y aplicando las transformaciones duales $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{E}$, se hallan los campos,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -\nabla \times \mathbf{A}_{(m)} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & -iAe^{i\omega(\frac{z}{v}-t)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \omega A e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{j}}. \end{aligned} \quad (6.36)$$

y

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{(m)}}{\partial t} = \omega A e^{i\omega(\frac{z}{v}-t)}\hat{\mathbf{i}}. \quad (6.37)$$

Por tanto se observa que

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{(e)}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{A}_{(m)} = \mathbf{E} \quad (6.38)$$

y que

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}_{(e)} = -\frac{\partial \mathbf{A}_{(m)}}{\partial t} \mathbf{B}, \quad (6.39)$$

concluyendo que se pueden identificar los campos de radiación de cargas con los campos de radiación de monopolos, lo que hace innecesaria la definición de los monopolos con cuerdas de Dirac. Se puede observar adicionalmente que debido a que la acción es un escalar de Lorentz, todos los términos de

la densidad Lagrangiana lo deben ser también; como la electrodinámica es lineal, el término de interacción carga-monopolo debe ser una suma de cantidades bilineales que contienen dos factores: uno relacionado con cargas y el otro con monopolos y que un sistema de una carga sin movimiento - monopolo sin movimiento, no cambia en el tiempo.

Las cargas no interactúan con campos ligados de monopolos y los monopolos no interactúan con campos ligados de cargas. Las cargas interactúan con todos los campos de radiación de las cargas y con los campos de radiación de los monopolos. Los monopolos interactúan con todos los campos de radiación de los monopolos y con los campos de radiación de las cargas. Los campos de radiación de las cargas y de los monopolos son considerados como una sola entidad y se denotan con el subíndice w para formar el tensor ligado de campos de radiación de cargas, $F_{(e,w)}^{\mu\nu}$ y el tensor ligado de campos de radiación de monopolos, $F_{(m,w)}^{\mu\nu}$. Finalmente la forma de la fuerza de Lorentz ejercida sobre las cargas es, $ma_{(e)}^\mu = q_m F_{(e,w)}^{\mu\nu} v_{(e)\nu}$ y la ejercida correspondientemente sobre los monopolos es, $ma_{(m)}^\mu = q_m F_{(m,w)}^{*\mu\nu} v_{(m)\nu}$, donde a los campos monopolaes se les denomina campos magnetoeléctricos [3], [4].

Para desarrollar una teoría de monopolos de ésta clase, se debe tener en cuenta que ésta debe reducir a la teoría conocida de cargas y ondas para un sistema sin monopolos y a una teoría dual para sistemas donde las cargas no existen. La teoría se debe originar de una densidad Lagrangiana cuyos términos son funciones regulares de los potenciales, de sus derivadas, de las corrientes de carga y de monopolos.

Los términos de dicha teoría deben ser escalares de Lorentz y deberían serían invariantes bajo traslaciones espacio-temporales asociadas al grupo de Poincaré; adicionalmente las ecuaciones de movimiento de sus campos deben ser lineales y deben sostener el principio de superposición.

Por último se debe asumir que un sistema de una carga y un monopolo, donde las dos partículas no se mueven, no cambia con el tiempo.

Capítulo 7

La Teoría de los Polos Magnéticos

En éste capítulo se pretende explicar y desarrollar detalladamente las ecuaciones y los procesos matemáticos del artículo original de P. A. M. Dirac [10]. Lo que se busca aquí es presentar la teoría original del monopolo y su cuantización con el objetivo que el lector entienda los conceptos originales y la matemática involucrada que llevaron a Dirac a la regla de cuantización de la carga eléctrica, usando la teoría de polos magnéticos.

El artículo de Dirac [10]: 'La teoría de los polos magnéticos', el autor describe la forma general de las ecuaciones clásicas de movimiento enmarcada en el tensor electromagnético y construye la dinámica electromagnética mediante la ecuación de Lorentz, así como la teoría de los polos magnéticos comparando continuamente con el caso eléctrico de forma tal que conceptualmente adiciona términos a las ecuaciones para solucionar problemas relacionados principalmente con las cuerdas de discontinuidad o cuerdas de Dirac, sin que éstos afecten las ecuaciones de movimiento. El método usado es el de cambiar el punto de referencia al de las líneas de mundo de las partículas y nuevas variables sin carácter físico que orientan dichas cuerdas contenidas en láminas asociadas a cada polo. Los potenciales retardados se definen en éstas láminas pues son contribuciones de los polos y son del tipo Lienard-Wiechert. El autor modifica tales potenciales para que sean consistentes con la teoría básica. El paso siguiente es la definición del principio de acción de la electrodinámica, que debe ser modificado para que no hallar inconsistencias con las cuerdas de Dirac usando la condición que una cuerda nunca debe pasar a través de una partícula cargada. Ésta modificación da como resultado un término

relacionado con la variación del potencial que no afecta las ecuaciones de movimiento. Con todo lo anterior el autor define la función Hamiltoniana para poder cuantizar la teoría y por tanto se escriben los momentos tanto de las partículas cargadas como de los polos usando la técnica de Fourier. Las ecuaciones de movimiento están descritas entre dos superficies tridimensionales: de los campos y de los polos, de forma tal que las partículas no existen sino hasta cuando llegan a la superficie de los campos y lo mismo para los polos suponiendo que éstos están unidos a las cuerdas y que su superficie tridimensional vas más allá. Sin embargo a pesar que algunos campos dejan de evolucionar dinámicamente, el resto del sistema continua hasta que todo éste evoluciona totalmente. Éste comportamiento para las acciones de ciertas partículas o campos y otros no es útil para el manejo de la teoría pues, el sistema no tiene que detenerse dinámicamente cuando solamente un campo lo hace. Con las anteriores consideraciones se construye las ecuaciones que relacionan la dinámica de las coordenadas y los momentos (tanto para las partículas cargadas como para los polos) y con éstas se hallan las ecuaciones de Hamilton-Jacobi con las que se cuantiza la teoría, obteniendo la condición de cuantización de Dirac que define la necesidad de la existencia del polo magnético para poder cuantizar la carga eléctrica.

I-II. Introducción y ecuaciones clásicas de movimiento

El autor describe la electrodinámica desde el punto de vista de la simetría de los campos eléctricos y magnéticos concluyendo que para que ésta sea coherente el polo magnético debe existir y el soporte de dicha afirmación es que hay teorías exitosas que se han basado en partículas predichas teóricamente y que después de cierto tiempo se han descubierto. Un ejemplo para las que se descubrieron son los neutrinos y para las que no, es el bosón de Higgs. También se apoya en el hecho de que el polo magnético (monopolo) es necesario para la cuantización de la carga eléctrica, dada por,

$$eg = \frac{1}{2}n\hbar c \quad (7.1)$$

donde n es un entero y g es la carga magnética; por tanto la carga eléctrica para su cuantización requiere que sea definida mediante $\frac{1}{2}\frac{n\hbar c}{g}$. En la sección *Las ecuaciones clásicas de movimiento* se hace una breve descripción de la teoría de los campos electromagnéticos usando tanto el tensor electromagnético $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$ (ver Capítulo 4), como su dual $F_{\mu\nu}^\dagger$ (En

el Capítulo 4 el tensor dual está definido por $\mathcal{F}^{\mu\nu}$, con las propiedades $F_{01}^\dagger = F_{23}$, $F_{23}^\dagger = -F_{01}$ y $F_{\mu\nu}^{\dagger\dagger} = -F_{\mu\nu}$. Adicionalmente se usa un nuevo tensor electromagnético $G_{\mu\nu}$ que cumple la condición $F_{\mu\nu}^\dagger G^{\mu\nu} = F_{\mu\nu} G^{\dagger\mu\nu}$. Las ecuaciones de Maxwell están dadas por $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = -4\pi j_\mu$, donde j_μ es la cuadri-densidad de corriente eléctrica y para el espacio dual se cumple que la cuadri-divergencia se anula; esto es $\frac{\partial F_{\mu\nu}^\dagger}{\partial x_\nu} = 0$, resultando una falta de simetría en las ecuaciones de Maxwell que es corregida si la ecuación en el espacio dual se define como $\frac{\partial F_{\mu\nu}^\dagger}{\partial x_\nu} = -4\pi k_\mu$, donde k_μ es la cuadri-densidad de corriente magnética. Usando la línea de mundo de la partícula cargada que determina su evolución espacio-temporal y está definida por $z_\mu = z_\mu(s)$, donde s es el tiempo propio de la partícula, una carga puntual e que se desplaza en una línea de mundo infinita genera una cuadri-densidad de corriente eléctrica dada por

$$j_\mu(x) = \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x - z) ds. \quad (7.2)$$

Para el caso magnético, la cuadri-corriente magnética está definida de forma similar:

$$k_\mu(x) = \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x - z) ds. \quad (7.3)$$

Las funciones delta $\delta^4(x) = \delta(x_0)\delta(x_1)\delta(x_2)\delta(x_3)$ (ver apéndice 9.1) son usadas para describir un punto de discontinuidad en el espacio de las cargas y $\sum_{e,g}$ describe la suma sobre las partículas cargadas (e) o sobre los polos (g). Con el fin de describir la dinámica del sistema se escribe la fuerza de Lorentz $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ en función del tensor electromagnético quedando,

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z). \quad (7.4)$$

Dicha ecuación describe el comportamiento dinámico de una partícula eléctrica cargada a lo largo de su línea de mundo y la descripción de los campos se realiza en el punto z donde está situada la partícula. Para una partícula cargada magnéticamente, usando consideraciones de simetría, se asume una cuadri-fuerza de Lorentz,

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}^\dagger(z). \quad (7.5)$$

Debido al caracter de los campos si la medición de éstos se hace exactamente en el punto z , dicha magnitud originará una divergencia; por éste motivo las variaciones se deben realizar en magnitudes bajas, pero debido a que la función delta varía brúscamente, es conveniente reemplazarla por una función más suave que cumpla las propiedades de la función delta o imponer condiciones límite tales que la teoría solo es invariante de Lorentz en el límite mismo y después de éste, pero no antes (ésta es la elección hecha por Dirac). Dirac modificó el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ al tensor $F_{\mu\nu}^*$ que cumple las condiciones requeridas, resultando las ecuaciones de movimiento para las cargas eléctricas y para los polos,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x - z) ds \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^\dagger}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x - z) ds. \quad (7.7)$$

Las cuadri-fuerzas de Lorentz también se modifican, para las partículas cargadas y para los polos a,

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = e \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}(z) \quad (7.8)$$

$$m \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} = g \frac{dz^\nu}{ds} F_{\mu\nu}^{\dagger*}(z) \quad (7.9)$$

donde solo falta estructurar al nuevo tensor electromagnético.

III. Potenciales electromagnéticos

Para crear una teoría que pueda llevarse a la mecánica cuántica, se necesita llegar al principio de acción (ver apéndice 9.6) mediante las ecuaciones de movimiento y para ésto se necesitan los potenciales electromagnéticos.

Mediante la definición $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, en función del cuadri-potencial, se observa que se cumplen las ecuaciones $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -4\pi j_\mu$ y $\frac{\partial F_{\mu\nu}^\dagger}{\partial x^\nu} = 0$, pero éstas no cumplen con la condición del polo magnético pues su cuadri-divergencia es nula. Por dicho motivo la definición del tensor electromagnético debe variar de alguna manera debido a que éste falla en algunos puntos de la superficie que encierra al polo, formando una 'especie' de cuerda que se extendería desde el polo hacia el infinito uniendo todos los puntos sobre cada una de

las superficies que encierran al polo; el inconveniente es que dicha cuerda no tendría significado físico y debido a que es infinita no existirían variables para describirla.

Las variables necesarias para fijar las posiciones de las cuerdas son coordenadas dinámicas y momentos conjugados a ellas. Dichas variables son necesarias para una teoría dinámica pero no corresponden con observables y no afectan el fenómeno físico.

Cada cuerda esquemaliza una lámina bidimensional en el espacio-tiempo; éstas láminas serán las regiones donde el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$ falla y cada lámina podría ser descrita expresando un punto general y_μ , sobre ella como función de dos parámetros τ_0 y τ_1 ($y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1)$). Se supone que cada lámina se extiende al infinito y por tanto los parámetros τ_0 y τ_1 pueden ser asignados con valores de forma tal que $\tau_1 = 0$ sobre la línea de mundo del polo y se extiende al infinito siguiendo la cuerda y $-\infty < \tau_0 < +\infty$ como valores que describen desde el pasado infinito hasta el futuro infinito.

La característica de ésta cuerda es que en sus extremos deben estar localizados los polos. Así el nuevo tensor se define como,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger, \quad (7.10)$$

donde el campo $G_{\mu\nu}^\dagger$ es un campo que desaparece en todo sitio excepto sobre una de las láminas y su suma se realiza sobre todas las láminas cada una de las cuales está asociada a un polo. Como se mencionó anteriormente, cada una de estas láminas que encierran al polo puede ser descrita por un conjunto de coordenadas (τ_0, τ_1) , formando una función $y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1)$ con el objetivo de orientar los puntos en los cuales existe la divergencia debido a la cuerda. Reemplazando la ecuación (7.10) en la ecuación (7.7), se obtiene el siguiente desarrollo: primero calculando la cuadri-divergencia del tensor electromagnético del polo

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^\dagger &= \frac{\partial A_\nu^\dagger}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu^\dagger}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger\dagger} \\ &\equiv \partial_\mu A_\nu^\dagger - \partial_\nu A_\mu^\dagger + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger\dagger} \end{aligned} \quad (7.11)$$

y por tanto,

$$\partial^\nu F_{\mu\nu}^\dagger = \partial^\nu \partial_\mu A_\nu^\dagger - \partial^\nu \partial_\nu A_\mu^\dagger + 4\pi \sum_g \partial^\nu G_{\mu\nu}^{\dagger\dagger} \quad (7.12)$$

pero debido a que $G_{\mu\nu}^{\dagger\dagger} = -G_{\mu\nu}$ y a que $\partial^\nu F_{\mu\nu}^\dagger = -4\pi \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x-z) ds$ entonces, $-4\pi \sum_g \partial^\nu G_{\mu\nu} = -4\pi \sum_g g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x-z) ds$ y por tanto es obvio que

$$\partial^\nu G_{\mu\nu} = g \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta^4(x-z) ds; \quad (7.13)$$

su solución se logra usando el teorema de Stokes

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial V}{\partial x} \right) dx dy = \int U \left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy \right), \quad (7.14)$$

para $x = \tau_0$, $y = \tau_1$, $U = \delta^4(x-y)$ y $V = y_\mu$,

$$\begin{aligned} \int_S \int \left(\frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1 \\ = \int_C \delta^4(x-y) \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right) \end{aligned} \quad (7.15)$$

reorganizando el primer miembro se llega a

$$- \int_S \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial \tau_0} - \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \right) d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.16)$$

usando la regla de la cadena para y_ν

$$- \int_S \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial y_\nu} d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.17)$$

ahora se intercambia la variable de integración para la función delta quedando

$$\int_S \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \frac{\partial \delta^4(x-y)}{\partial x_\nu} d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.18)$$

y por tanto queda

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \int_S \int \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} - \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \delta^4(x-y) d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.19)$$

Finalmente al incluir el segundo miembro del teorema de Stokes y teniendo en cuenta la carga magnética se obtiene,

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = g \int \delta^4(x - y) \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right) \quad (7.20)$$

recordando que $y_\mu = y_\mu(\tau_0, \tau_1)$ y tomando $\tau_1 = 0$, debido a que se integra solo sobre una sola lámina del anillo y que no tienda al infinito, entonces

$$\frac{\partial G_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \int \delta^4(x - y) \left(\frac{\partial y_\mu(\tau_0, 0)}{\partial \tau_0} \right) d\tau_0 = \partial^\nu G_{\mu\nu}, \quad (7.21)$$

haciendo las correspondencias $\tau_0 = s$ y $\frac{\partial y_\mu(\tau_0, 0)}{\partial \tau_0} = \frac{dz_\mu}{ds}$, $y_\mu(\tau_0, 0)$ es la línea de mundo de la partícula, se observa que corresponde con la ecuación (7.13). También aquí se puede observar que el campo que está definido solamente sobre las láminas y que le da consistencia a la electrodinámica con el polo magnético incluido tiene la forma:

$$G_{\mu\nu} = g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} d\tau_0 \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} \right) d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.22)$$

Las ecuaciones (7.6) y (7.7) están directamente relacionadas mediante la ecuación $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger$ para definir los potenciales retardados (PR) en las líneas de mundo de las partículas previamente definidas y su contribución a cada partícula depende solamente de la línea de mundo de ella y de la lámina que está unida a ésta en el caso que halla polo. La contribución de los PR se define mediante una función invariante de Lorentz definida por

$$J(x) = \begin{cases} 2\delta(x_\mu^\mu) & \text{para } x_0 > 0 \\ 0 & \text{para } x_0 < 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

o por

$$J(x) = \frac{1}{r} \delta(x_0 - r), \quad (7.24)$$

$$r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (7.25)$$

La función $\Delta(x)$ de Jordan y Pauli (ver apéndice 9.2) se relaciona con $J(x)$ mediante

$$\Delta(x) = J(x) - J(-x). \quad (7.26)$$

Se verifica directamente alrededor del origen usando la integral de $\square J(x)$ sobre un pequeño volumen cuatridimensional alrededor del origen como una integral superficial tridimensional sobre la frontera de ese volumen que,

$$\square J(x) = 4\pi\delta_4(x). \quad (7.27)$$

La contribución de una partícula cargada a los PR está definida por,

$$A_{\nu,\text{ret}}^*(x) = e \int_{-\infty}^{\infty} J(x-z) \frac{dz_\nu}{ds} ds \quad (7.28)$$

basada en los campos y potenciales dados por Liénard-Wiechert,

$$A^\alpha(x) = \frac{4\pi}{c} \int d^4x' D_{\text{ret}}(x-x') J^\alpha(x'), \quad (7.29)$$

donde $D_{\text{ret}}(x-x')$ es el propagador retardado (ret) o avanzado (av),

$$D_i(x-x') = \begin{cases} i = \text{ret} & \frac{1}{2\pi} \theta(x_0 - x'_0) \delta[(x-x')^2] \\ i = \text{av} & \frac{1}{2\pi} \theta(x'_0 - x_0) \delta[(x-x')^2], \end{cases} \quad (7.30)$$

y donde $\theta(x_0 - x'_0)$ es la función de Heaviside o función escalón. La contribución correspondiente de un polo está dada por la integración sobre toda la lámina, y debido a que su origen tiene un caracter antisimétrico, debe estar presente el tensor totalmente antisimétrico $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$:

$$A_{\nu,\text{ret}}(x) = g\varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} \iint \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial J(x-y)}{\partial x_\sigma} d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.31)$$

Para evidenciar como es la variación de ese PR en la lámina, se realiza una variación cuatridimensional quedando,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu A_{\nu,\text{ret}}(x) = g\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} \iint \frac{\partial y^\lambda}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y_\sigma \partial y^\mu} d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.32)$$

Usando la relación

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \varepsilon_{\nu\lambda\rho\sigma} = \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta + \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\alpha \delta_\lambda^\beta + \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\alpha \delta_\lambda^\beta - \delta_\lambda^\mu \delta_\rho^\beta \delta_\sigma^\alpha - \delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\beta \delta_\lambda^\alpha - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\beta \delta_\lambda^\alpha \quad (7.33)$$

la ecuación anterior se modifica a,

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_{\nu,\text{ret}}(x) = g \iiint \left\{ \frac{\partial y^\mu}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\beta} + \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\mu}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\alpha} \right. \\ \left. + \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\rho} - \frac{\partial y^\mu}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\alpha} \right. \\ \left. - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\mu}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\beta} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial y^\mu \partial y_\rho} \right\} d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.34) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = g \iiint \left\{ \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_0 \partial y_\beta} + \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_1 \partial y_\alpha} + \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \square J(x-y) \right. \\ \left. - \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_0 \partial y_\alpha} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_1 \partial y_\beta} - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \square J(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = g \iiint \left\{ \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_0 \partial y_\beta} + \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_1 \partial y_\alpha} - \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_0 \partial y_\alpha} \right. \\ \left. - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_1 \partial y_\beta} \right\} d\tau_0 d\tau_1 + 4\pi g \iiint \left\{ \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \delta_4(x-y) \right. \\ \left. - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \delta_4(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1, \quad (7.36) \end{aligned}$$

donde $\square J(x-y) = 4\pi\delta_4(x-y)$. Por tanto usando, $\iint \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \frac{\partial^2 J(x-y)}{\partial\tau_0 \partial y_\beta} d\tau_0 d\tau_1 = \int dy^\alpha \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta}$ y $dy^\alpha \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} = \left[\frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} \right]_{y=z} \frac{dz^\alpha}{ds} ds$, se obtiene

$$\begin{aligned} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\partial_\mu A_{\nu,\text{ret}}(x) = g \iiint \left\{ \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} dy^\alpha + \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\alpha} dy^\beta \right. \\ \left. - \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\alpha} dy^\beta - \frac{\partial J(x-y)}{y_\beta} dy^\alpha \right\} + 4\pi g \iiint \left\{ \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_1} \delta_4(x-y) \right. \\ \left. - \frac{\partial y^\alpha}{\partial\tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial\tau_1} \delta_4(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.37) \end{aligned}$$

Integrando mediante el uso de la función delta y debido a que,

$$g \int \left\{ \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\alpha} dy^\beta + \frac{\partial J(x-y)}{y_\beta} dy^\alpha \right\} \quad (7.38)$$

es un intercambio entre α y β y teniendo en cuenta que,

$$g^{-1}G^{\alpha\beta} = \int \left\{ \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_1} \delta_4(x-y) - \frac{\partial y^\alpha}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\beta}{\partial \tau_1} \delta_4(x-y) \right\} d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.39)$$

la anterior ecuación se escribe abreviadamente de la forma,

$$\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu A_{\nu,\text{ret}}(x) = g \int \left\{ \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\beta} dy^\alpha + \frac{\partial J(x-y)}{\partial y_\alpha} dy^\beta \right\} - (\alpha\beta) + 4\pi G^{\alpha\beta} \quad (7.40)$$

cambiando la referencia a la línea de mundo de la partícula descrita con las cuadri-coordenadas $z_\mu(s)$, donde s es el tiempo propio de ésta y $\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu A_{\nu,\text{ret}}(x) - 4\pi G^{\alpha\beta} = F_{\text{ret}}^{\dagger\alpha\beta}$, la ecuación se transforma a

$$\begin{aligned} F_{\text{ret}}^{\dagger\alpha\beta} &= g \int \left[\frac{\partial J(x-y)}{\partial z_\beta} \right]_{y=z} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta) \\ &= g \int \frac{\partial J(x-z)}{\partial z_\beta} \frac{dz^\alpha}{ds} ds - (\alpha\beta). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Usando el hecho que $B_{\text{ret}}^\alpha = g \int \frac{\partial J(x-z)}{\partial z_\beta} \frac{dz^\alpha}{ds} ds$, o sea que se mantiene la correspondencia del potencial de Lienard-Wiechert con los potenciales magnéticos para un campo retardado producido por un polo magnético (campos magnéticos retardados B_{ret}^σ), la ecuación finalmente toma la forma

$$F_{\text{ret}}^{\dagger\alpha\beta} = -\frac{\partial B_{\text{ret}}^\alpha}{\partial x_\beta} + \frac{\partial B_{\text{ret}}^\beta}{\partial x_\alpha}. \quad (7.42)$$

IV. Principio de acción

El principio de acción (ver apéndice 9.6) se enuncia sobre tres términos: el de la partícula (I_1), el del campo (I_2) y el de las interacciones de las cargas eléctrica y magnética con el campo (I_3). Entonces la acción se define $I = I_1 + I_2 + I_3$, donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{e+g} m \int ds \\ I_2 &= \frac{1}{16\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) F^{\mu\nu}(x) d^4x \\ I_3 &= \sum_e e \int A^\nu(z) \frac{dz_\nu}{ds} ds \end{aligned} \quad (7.43)$$

donde $F_{\mu\nu}^* = \int F_{\mu\nu}(x')\gamma(x-x')d^4x'$ con $\gamma(x-x')$ definida como una función par que se aproxima a la función delta $\delta^4(x)$ y que tiene como objetivo evitar infinitos en la ecuación de movimiento debido a los campos infinitos producidos por las cargas puntuales y por los monopolos magnéticos; por ésta razón el delta I_2 se redefine como $I'_2 = \frac{1}{16\pi} \iint F_{\mu\nu}(x')\gamma(x-x')F^{\mu\nu}(x')d^4xd^4x'$. La variación de la acción I_1 está dada por,

$$\delta I_1 = - \sum_{e+g} m \int \frac{d^2 z_\mu}{ds^2} \delta z^\mu \delta s. \quad (7.44)$$

Para I_3 ,

$$\delta I_3 = \sum_e e \int \left[\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right) + \delta A_\nu \right]_{x=z} \frac{dz^\nu}{ds} ds \quad (7.45)$$

Finalmente la variación en la acción del campo es

$$\begin{aligned} \delta I'_2 &= \frac{1}{16\pi} \iint [F_{\mu\nu}(x)\delta F^{\mu\nu}(x)\gamma(x-x') + \delta F_{\mu\nu}(x)F^{\mu\nu}(x)\gamma(x-x')] d^4xd^4x' \\ &= \frac{1}{8\pi} \int [F_{\mu\nu}^*(x)\delta F^{\mu\nu}(x)] d^4x \end{aligned} \quad (7.46)$$

pero $F^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G^{\dagger\mu\nu}$ y $\delta F^{\mu\nu} = \frac{\partial \delta A^\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g \delta G^{\dagger\mu\nu}$, por tanto reemplazando se obtiene

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= -\frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x^\nu} d^4x + \frac{1}{2} \sum_g \int F_{\mu\nu}^*(x) \delta G_{\mu\nu}^\dagger d^4x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial F_{\mu\nu}^*(x)}{\partial x^\nu} \delta A^\mu d^4x + \frac{1}{2} \sum_g \int F_{\mu\nu}^{\dagger*}(x) \delta G_{\mu\nu} d^4x \end{aligned} \quad (7.47)$$

Usando la definición $G_{\mu\nu}(x) = 2g \iint \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1$ su variación

está dada por,

$$\begin{aligned}
\delta G_{\mu\nu}(x) &= 2g \iint \delta \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1 \\
&\quad + 2g \iint \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y^\sigma} dy^\sigma d\tau_0 d\tau_1 \\
&= 2g \iint \left(\frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \delta_4(x-y) d\tau_0 d\tau_1 \\
&\quad + 2g \iint \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y^\sigma} \delta y^\sigma d\tau_0 d\tau_1
\end{aligned} \tag{7.48}$$

por tanto $\delta I'_2$ es

$$\begin{aligned}
\delta I'_2 &= \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x \\
&\quad + \sum_g g \int F_{\mu\nu}^*(x) \left\{ \iint \left[\left(\frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \delta_4(x-y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial \delta_4(x-y)}{\partial y^\sigma} \delta y^\sigma \right] d\tau_0 d\tau_1 \right\} d^4x. \tag{7.49}
\end{aligned}$$

Integrando sobre x ,

$$\begin{aligned}
\delta I'_2 &= \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x + \sum_g g \iint \left[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \left(\frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)}{\partial y^\sigma} \delta y^\sigma \right] d\tau_0 d\tau_1, \tag{7.50}
\end{aligned}$$

pero $\frac{\partial}{\partial \tau_0}[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\delta y^\mu] = \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)}{\partial \tau_0}\delta y^\mu + F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_0}$, entonces,

$$\begin{aligned}\delta I_2 &= \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x + \sum_g g \iint \left[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \left(\frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \left(\frac{\partial}{\partial \tau_0}[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\delta y^\mu] - F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_0} \right) \right] d\tau_0 d\tau_1 \\ &= \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^*(x) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x + \sum_g g \iint \left[\frac{\partial}{\partial \tau_1}[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\delta y^\mu] \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} \right. \\ &\quad - \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)}{\partial \tau_1} \delta y^\mu \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_0} + \frac{\partial}{\partial \tau_0}[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\delta y^\mu] \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)}{\partial \tau_0} \delta y^\mu \frac{\partial \delta y_\mu}{\partial \tau_1} \\ &\quad \left. + \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial}{\partial \tau_0}[F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y)\delta y^\mu] - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{\partial \delta y^\mu}{\partial \tau_0} \right] d\tau_0 d\tau_1 \quad (7.51)\end{aligned}$$

Siguiendo el desarrollo algebraico, se realiza el cambio a la línea de mundo tal como se hizo anteriormente y usando el teorema de Stokes,

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial d\tau_0} \frac{\partial V}{\partial d\tau_1} - \frac{\partial U}{\partial d\tau_1} \frac{\partial V}{\partial d\tau_0} \right) d\tau_0 d\tau_1 = \int U \left(\frac{\partial V}{\partial \tau_0} d\tau_0 + \frac{\partial V}{\partial \tau_1} d\tau_1 \right), \quad (7.52)$$

se obtiene la acción total,

$$\delta I = \delta I'_2 - \frac{1}{4\pi} \int F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x + \delta I_1 + \delta I_2 = \delta I'_2 + \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu} \delta A^\mu d^4x + \delta I_1 + \delta I_2 \quad (7.53)$$

donde,

$$\begin{aligned}\delta I_2 &= \sum_e e \int \left[\left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \right)_{x=z} \delta z^\mu + (\delta A_\nu)_{x=z} \right] \left(\frac{dz^\nu}{ds} \right) ds \\ \delta I'_2 &= \sum_g g \int F_{\mu\nu}^{\dagger*}(z) \delta z^\mu \frac{dz^\nu}{ds} ds - \sum_g g \iint \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}^{\dagger*}}{\partial y^\mu} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial F_{\rho\mu}^{\dagger*}}{\partial y^\nu} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu d\tau_0 d\tau_1. \quad (7.54)\end{aligned}$$

Si $\sum_g g \iint \left(\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}^{\dagger*}}{\partial y^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}^{\dagger*}}{\partial y^\nu} \right) \frac{\partial y^\rho}{\partial \tau_0} \frac{\partial y^\nu}{\partial \tau_1} \delta y^\mu d\tau_0 d\tau_1 = 0$, entonces $\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}}{\partial y^\rho} + \frac{\partial F_{\nu\rho}^{\dagger*}}{\partial y^\mu} + \frac{\partial F_{\rho\mu}^{\dagger*}}{\partial y^\nu} = 0$, ésto significa que todos los puntos se mantendrán en la lámina.

Igualando a cero los otros coeficientes se puede observar que se reproducen las ecuaciones de movimiento iniciales, lo cual le da consistencia a la teoría y se concluye que las cuerdas de Dirac nunca deben pasar por las partículas cargadas.

De $\frac{\partial F_{\mu\nu}^{\dagger*}}{\partial y^\nu} = 0$ se observa que al aplicar el principio de acción no se llega a una ecuación de movimiento lo que significa que las cuerdas de Dirac no poseen ecuación de movimiento y por tanto no tienen carácter físico.

Con la acción anterior existe el problema de la anulación del momento conjugado a A_0 en la formulación Hamiltoniana. La solución de esto se logra adicionando un término a la acción de la forma, $I_4 = \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x$, cuya variación es

$$\begin{aligned} \delta I_4 &= \frac{1}{8\pi} \int \frac{\partial \delta A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x_\nu} d^4x, \end{aligned} \quad (7.55)$$

integrando por partes con $U = \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu}$, $dV = \frac{\partial \delta A_\mu}{\partial x_\nu} dx^4$, $dU = \frac{\partial^2 A_\nu^*}{\partial x^\mu \partial x_\nu} dx^4$ y $V = \delta A^\mu$ y usando la condición de integral extremal, se obtiene,

$$\delta I_4 = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\partial^2 A_\nu^*}{\partial x^\mu \partial x_\nu} \delta A^\mu d^4x, \quad (7.56)$$

pero debido a la condición suplementaria que $\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} = 0$ o $\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\mu} = 0$, entonces el término $\frac{\partial^2 A_\nu^*}{\partial x^\mu \partial x_\nu}$ no afecta las ecuaciones de movimiento. En la formulación Hamiltoniana es necesario distinguir entre las ecuaciones que se mantienen en virtud de las condiciones suplementarias y las que son independientes de éstas; entonces,

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}^*}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z) ds \quad (7.57)$$

con $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger$ y $G_{\mu\nu} = g \iint \left(\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_0} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_1} - \frac{\partial y_\mu}{\partial \tau_1} \frac{\partial y_\nu}{\partial \tau_0} \right) \delta_4(x - z) d\tau_0 d\tau_1$ entonces reemplazando,

$$-\frac{\partial^2 \partial A_\mu^*}{\partial x_\nu \partial x^\nu} + 4\pi \sum_g \frac{\partial (G_{\mu\nu}^\dagger)^*}{\partial x_\nu} = -4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z) ds, \quad (7.58)$$

debido a que $\frac{\partial^2 A_\nu^*}{\partial x_\nu \partial x^\mu}$ se anula por la condición suplementaria. Finalmente se obtiene el D'Alembertiano,

$$\square A_\mu^* = 4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x - z) ds + 4\pi \sum_g \frac{\partial(G_{\mu\nu}^\dagger)^*}{\partial x_\nu} \quad (7.59)$$

V. El método para pasar a la formulación Hamiltoniana

Para cuantizar una teoría se usa convertir las ecuaciones de movimiento de un sistema dinámico en forma de principio de acción en forma Halmiltoniana. El método es tomar la integral de acción previa a un tiempo t y hallar su variación permitiendo la variación de t . Entonces la variación de la acción δI es función lineal de δt y δq en las coordenadas dinámicas del tiempo. Los términos adicionales en δI se cancelan cuando se usan las ecuaciones de movimiento. Se introduce la variación total en los q finales, $\Delta q = \delta q + \dot{q}\delta t$ y usando la transformación de Legendre $\delta I = \sum p_r(q_r, \dot{q}_r) \Delta q_r - W(q_r, \dot{q}_r) \delta t$, se definen los momentos p_r y la energía W que son función de las coordenadas generalizadas q_r y de las velocidades generalizadas \dot{q}_r . Éstas variables son constantes en el tiempo si la Hamiltoniana transformada es nula y que satisface la relación

$$W - H(p, q) = 0 \quad (7.60)$$

que es la ecuación de Hamilton-Jacobi cuyo argumento son derivadas parciales de la acción respecto a q y a t . Debido a que existen varias ecuaciones que relacionan a q y a p , entonces deben existir varias ecuaciones de Hamilton-Jacobi que originen varias ecuaciones de onda.

Relativistamente es el mismo procedimiento pero se evalúa la integral de la acción sobre el espacio-tiempo relacionado con una superficie tridimensional que se extiende al infinito. Lo anterior se puede modificar debido a que en lugar de detener la integral de acción en un tiempo determinado o en una superficie S espacial-oide tridimensional definida, se podrían detener diferentes términos en la acción en diferentes tiempos. Lo anteriormente expuesto es posible si se describe la dinámica del sistema enmarcada en difentes partes a diferentes tiempos y después de que algunas partes del sistema han dejado de evolucionar voluntaria o involuntariamente desde el punto de vista dinámico, el resto del sistema lo sigue haciendo hasta que eventualmente, termine la dinámica del sistema. Cada vez que una parte del sistema para, se puede definir para ésta una ecuación de Hamilton-Jacobi. Éste método no siempre es

conveniente para solución de muchos problemas por tanto se generalizará pasando a un espacio en el que una superficie espacial-oide tridimensional S en la que se puede detener diferentes términos de la integral y no toda su acción. El hecho es que si se evalúa cuidadosamente la dinámica del sistema, se puede observar si parte de éste se comporta de manera no natural o no física; una vez hecha la evaluación se detiene esa parte de la integral de acción y puede hacerse dicho proceso a diferentes tiempos de evolución del sistema y el resto de éste seguirá su desarrollo regido por la ecuación de movimiento hasta cuando ésta se detenga, colapse, etc.

Una forma de detener la integral de acción cuando existe interacción entre las partículas y los campos es suponer que las partículas no existen en el espacio-tiempo en donde se traslapan los conos de luz de diferentes partículas y posteriormente detener el campo donde el intervalo de tiempo para hacer ésto debe ser de gran magnitud para dejar que éste se estabilice. Entonces se varía la integral de acción detenida mediante la variación sobre los puntos de la línea de mundo de la partícula, z_μ , en el espacio-tiempo donde ésta desaparece y también en la superficie tridimensional de los campos S_F , donde el campo deja de existir. Intentando emular el principio de Hamilton o el teorema fundamental del cálculo variacional, se iguala a cero la parte de la variación de la integral de acción detenida y que no está conectada con las variaciones de frontera, se obtiene la ecuación de movimiento de las partículas antes que desaparezcan y de ésta manera se originan las ecuaciones de campo que rigen a la partícula aún después de haber dejado de existir. Debido a las variaciones realizadas en las líneas de mundo, Δz_μ , localizadas dentro del campo, se obtienen ecuaciones más apropiadas para manipular que las del método tradicional en donde las partículas y el campo dejan de existir simultáneamente.

Con la nueva electrodinámica se supone que todas las partículas y también las cuerdas unidas a los polos dejan de existir en la superficie tridimensional de los polos S_P , y que los campos electromagnéticos dejan de existir mucho más tarde sobre la superficie de los campos S_F , resultando que las integrales de acción dadas por las ecuaciones I_1 e I_3 de la ec. (7.43), tienen que detenerse cuando las líneas de mundo alcancen a S_P , mientras que las acciones dadas por las ecuaciones I_2 de la ec. (7.43) y (7.56), dejan de existir en la frontera S_F . El hecho de que se detengan éstas cantidades no significa que el sistema colapse, pues el resto de la dinámica de éste seguirá evolucionando hasta S_F y aún después cuando llegue a S_F .

Si la conexión entre U y U^* dada por $U^*(x) = \int U(x')\gamma(x-x')d^3x'$, y es tal

que el valor de cualquiera de ellos en un punto x es determinado por los valores del otro sobre los puntos espacio-temporales cercanos a x formando una especie de recursión. Así si uno se anula en cierta región espacio-temporal, el otro también lo hará en esa región excepto en las cercanías de ésta.

Debido a que $G_{\mu\nu}$ se anula en cualquier lugar excepto sobre las láminas, $G_{\mu\nu}^*$ debe hacerlo también en la región entre S_P y S_F , excepto en los puntos cerca de donde las cuerdas dejan de existir. En ésta región se tiene que deja de existir la primera suma sobre $\square A_\mu^* = 4\pi \sum_e e \int \frac{dz_\mu}{ds} \delta_4(x-z) ds + 4\pi \sum_g \frac{\partial(G_{\mu\nu}^\dagger)^*}{\partial x_\nu}$, debido a que la integral se detiene en S_P ; por tanto $\square A_\mu^*(x) = 0$, y se según lo analizado también se tiene que $\square A_\mu(x) = 0$ en la región entre S_P y S_F con excepción de los puntos cercanos a donde las partículas cargadas dejan de existir. En las regiones donde los D'Alembertianos de $A_\mu(x)$ y $A_\mu^*(x)$ se mantienen se pueden definir éstas mediante transformaciones de Fourier de la forma:

$$A_\mu(x) = \sum_{k_0} \int A_{k_\mu} e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} \quad (7.61)$$

$$A_\mu^*(x) = \sum_{k_0} \int A_{k_\mu}^* e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} \quad (7.62)$$

donde $kx = k_0x_0 - k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3$, $d^3k = dk_1dk_2dk_3$, $k_0 = \pm(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}}$ y la suma se realiza sobre los valores positivos y negativos de k_0 . El factor $\frac{d^3k}{k_0}$ se introduce debido a que éste es invariante de Lorentz. La condición que A_μ y A_μ^* sean reales da las condiciones,

$$A_{-k_\mu} = -\bar{A}_{k_\mu}, \quad A_{-k_\mu}^* = \bar{A}_{k_\mu}^*. \quad (7.63)$$

Sea la resolución de Fourier de la función $\gamma(x)$ dada por,

$$\gamma(x) = \frac{1}{2\pi} \int \gamma_l e^{ilx} d^4l \quad (\gamma_{-l} = \bar{\gamma}_l), \quad (7.64)$$

entonces la condición de función par $\gamma(-x) = \gamma(x)$ da $\gamma_{-l} = \gamma_l$ debido a que $\gamma_l \in \mathbb{R}$. Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} \gamma_k A_{k_\mu} &= \frac{1}{2\pi} \int \gamma_k e^{ikx} d^4k \left(\sum_{k_0} \int A_{k_\mu} e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k_0} \iint \gamma_k A_{k_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3k d^4k'}{k_0} \end{aligned} \quad (7.65)$$

donde usando el delta de Dirac se obtiene,

$$\begin{aligned}\gamma_k A_{k_\mu}(x) &= \sum_{k_0} \int \gamma_k A_{k_\mu} e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} \\ &= \sum_{k_0} \int A_{k_\mu}^* e^{ikx} \frac{d^3k}{k_0} = A_\mu^*(x).\end{aligned}\quad (7.66)$$

Es necesario conservar la transformación de Fourier de $A_\mu(x)$ en cada punto z donde una partícula cargada desaparece y mantener la transformación de Fourier de $A_\mu^*(x)$ en y donde la cuerda deja de existir. Es probable que lo anterior se pueda manejar de tal forma que al elegir una función γ que origine una condición para que el punto y nunca esté demasiado cerca a z , debido a que ésto significaría que la totalidad del sistema deja de existir. Si se asume un campo $U(x)$, esté definido por $U^*(x')$ en los puntos x' muy cercanos a los puntos x y por fuera del cono de luz de x . Así la transformación de Fourier de $A_\mu(z)$ es definida por la transformación de Fourier de $A_\mu^*(x')$ sobre los puntos x' para los cuales la transformación de Fourier de $A_\mu^*(z)$ es válida y está definida. De la misma forma la transformación de Fourier de $A_\mu^*(y)$ será válida solamente si $U^*(x)$ está definida por $U(x')$ en los puntos x' muy cercanos a x fuera del cono de luz de x .

La condición suplementaria $\frac{\partial A_\nu}{\partial x_\nu} = 0$, $\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x_\nu} = 0$, se modifica en la región entre S_P y S_F . Con las integrales dadas en las ecuaciones (7.28) y (7.31) detenidas en S_P y usando z' para $z(s')$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A_{\nu,\text{ret}}^*}{\partial x_\nu} &= \sum_e e \int_{-\infty}^z \frac{\partial J(x-z')}{\partial x_\nu} \frac{dz'_\nu}{ds'} ds' \\ &= - \sum_e e \int_{-\infty}^z \frac{\partial J(x-z')}{\partial z'_\nu} \frac{dz'_\nu}{ds'} ds' \\ &= - \sum_e e J(x-z)\end{aligned}\quad (7.67)$$

donde $-\sum_e e J(x-z)$ es diferente de cero debido cuando x esté sobre el cono de luz futura de cualquier punto z donde una partícula cargada no exista.

VI. La formulación Hamiltoniana

Dejando variar a S_P y no a S_F con el objetivo de formar la variación de

la integral de acción acotada justamente como en la sección anterior y evaluando los términos en δI conectados con los límites, resulta que los términos originados en la electrodinámica,

$$\sum_{e+g} m \left(\frac{dz_\mu}{ds} \right) \Delta z^\mu + \sum_e e A_\mu \Delta z^\mu \quad (7.68)$$

donde Δz^μ son los cambios totales de las coordenadas del punto donde la partícula deja de existir y que vienen de δJ_1 y δJ_2 . Ya no es posible usar la acción (7.47) sino la acción

$$\begin{aligned} \delta I_2 &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[F_{\mu\nu}^* \left(\frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) + F_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) \right] d^4x \\ &\quad + \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{S_F} [F_{\mu\nu}^* \delta G^{\mu\nu\dagger} + F_{\mu\nu} \delta G^{\mu\nu\dagger*}] d^4x \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[F_{\mu\nu}^* \left(\frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) + F_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) \right] d^4x + \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{\infty} F_{\mu\nu}^* \delta G^{\mu\nu\dagger} d^4x \end{aligned} \quad (7.69)$$

La razón del cambio en el segundo término es que si S_F está lo suficientemente lejos de S_P , entonces $\gamma(x - x') = 0$ para los x anteriores a S_P y los x' posteriores a S_F . Se usarán los métodos que se usaron para obtener (7.54) sobre las láminas que se extienden solamente sobre las partes de las láminas anteriores a S_P , y entonces se tendrán extra-términos, en forma de integrales de línea a lo largo de las líneas donde se encuentran las láminas, originados debido a la aplicación del teorema de Stokes. Organizando la parametrización de las láminas de forma tal que la línea donde la lámina encuentre a S_P es dada para $\tau_0 = \text{constante}$ y la línea donde la lámina variada halle la S_P variada es dada para $\tau_0 = \text{la misma constante}$, éstas integrales de línea toman la forma

$$\sum_g \int_0^\infty F_{\mu\nu}^{\dagger*} \delta y^\mu \left(\frac{dy^\nu}{d\tau_1} \right) d\tau_1. \quad (7.70)$$

Las líneas de integración son las posiciones de las cuerdas cuando dejan de existir. Para la definición de δI_4 , ya no es posible usar (7.55). En su lugar se usa

$$\delta I_4 = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left(\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x, \quad (7.71)$$

que es parecido al primer término de

$$\delta I'_2 = -\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left(F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + F_{\mu\nu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \frac{1}{4} \sum_g \int (F_{\mu\nu}^* \delta G^{\dagger\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta G^{\dagger\mu\nu*}) d^4x; \quad (7.72)$$

sumándolos da

$$\frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[\left(\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu}^* \right) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu} \right) \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right] d^4x + \dots \quad (7.73)$$

Usando $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} + 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger$, y su conjugada, se reescriben las cantidades anteriores como

$$\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu}^* \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger*} = \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger*} \quad (7.74)$$

y también

$$\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger. \quad (7.75)$$

Por tanto la ecuación queda

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[\left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger*} \right) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger \right) \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right] d^4x + \dots \\ &= \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[\left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^{\dagger*} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} - 4\pi \sum_g G_{\mu\nu}^\dagger \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) \right] d^4x + \dots \end{aligned} \quad (7.76)$$

teniendo en cuenta solamente los potenciales, entonces

$$\frac{1}{8\pi} \left[\int_{-\infty}^{S_F} \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \int_{-\infty}^{S_F} \left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x \right] + \dots \quad (7.77)$$

integrando por partes el primer término usando $U = \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu}$, $dV = \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} d^4x$, entonces $dU = \frac{\partial^2 A_\mu^*}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} d^4x$, $V = \delta A^\mu$ y por tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{S_F} \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} \right) d^4x &= \left[\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu \right]_{-\infty}^{S_F} - \int_{-\infty}^{S_F} \delta A^\mu \frac{\partial^2 A_\mu^*}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} d^4x \\ &= \left[\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu \right]_{-\infty}^{S_F} - \int_{-\infty}^{S_F} \frac{\partial^2 A_\mu^*}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} \delta A^\mu dS^\nu dx^\alpha \\ &= - \int \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu dS^\nu \end{aligned} \quad (7.78)$$

donde se ha integrado sobre la superficie tridimensional S_F usando $d^4x = dS^\nu dx^\alpha$ y se ha usado el hecho que los potenciales se anulan en el infinito y en S_F (condición de integral extremal). El resultado es

$$\begin{aligned} &\frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} \right) dS^\nu \\ &\quad - \frac{1}{8\pi} \int 4\pi \sum_g \left(G_{\mu\nu}^{\dagger*} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + G_{\mu\nu}^\dagger \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \dots \\ &= \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} \right) dS^\nu \\ &\quad - \frac{1}{2} \int \sum_g \left(G_{\mu\nu}^{\dagger*} \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + G_{\mu\nu}^\dagger \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right) d^4x + \dots \end{aligned} \quad (7.79)$$

Los restantes términos en δI , se cancelan debido cuando se usa la ecuación de movimiento, sin que S_F esté muy cerca a S_P . Por tanto se llega a,

$$\begin{aligned} \delta I &= \sum_{e+g} m \frac{dz_\mu}{ds} \Delta z^\mu + \sum_e e A_\mu(z) \Delta z^\mu + \sum_g g \int F_{\mu\nu}^{\dagger*} \delta y^\mu \frac{dy^\nu}{d\tau_1} d\tau_1 \\ &\quad + \frac{1}{8\pi} \int \left(\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} \right) dS^\nu. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Pero con la expresión anterior no es posible encontrar los momentos con la transformación original $\delta I = \sum p_r \Delta q_r - W \delta t$, pues las variaciones de A^μ y $A^{\mu*}$ dadas en (7.79) no son independientes entre si y debido a que la superficie de los campos S_F no ha variado.

Para hallar los momentos se pasa a los componentes de Fourier de los potenciales para los que se pudiera utilizar las transformaciones de Fourier dadas por las ecuaciones (7.61) y (7.62), debido a que existe interés en la expresión (7.79) con los potenciales sobre la superficie S_F . Se considera un movimiento tal que satisface las ecuaciones de movimiento de forma tal que las transformaciones de Fourier (7.61) y (7.62) son válidas sobre S_P también para dicho movimiento variado. Así la expresión (7.79) se convierte, hallando las variaciones de los potenciales,

$$\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} = \sum_{k_0} \int A_{k_\mu}^* (ik_\nu) e^{ikx} \frac{d^3 k}{k_0} \quad (7.81)$$

pero debido a que $\delta A^\mu = \sum_{k'_0} \int \delta A_{k'_\mu} e^{ik'x} \frac{d^3 k'}{k'_0}$ entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu &= i \sum_{k_0, k'_0} \iint k_\nu A_{k_\mu}^* \delta A_{k'_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} &= i \sum_{k_0, k'_0} \iint k'_\nu A_{k'_\mu} \delta A_{k_\mu}^* e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} \end{aligned} \quad (7.82)$$

usando $A_{k_\mu}^* = \gamma_k A_{k_\mu}$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu &= i \sum_{k_0, k'_0} \iint k_\nu \gamma_k A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} \\ \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} &= i \sum_{k_0, k'_0} \iint k'_\nu A_{k'_\mu} \gamma_{k'} \delta A_{k_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} \end{aligned} \quad (7.83)$$

y su suma es

$$\frac{\partial A_\mu^*}{\partial x^\nu} \delta A^\mu + \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} \delta A^{\mu*} = i \sum_{k_0, k'_0} \iint k_\nu (\gamma_k + \gamma_{k'}) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0}. \quad (7.84)$$

Al llevar la integral a la superficie tridimensional para S_F tal que $x_0 =$ constante, se tiene que el último término de la ecuación (7.80) se modifica a

$$\frac{i}{8\pi} \sum_{k_0, k'_0} \iiint k_\nu (\gamma_k + \gamma_{k'}) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k+k')x} \frac{d^3 k}{k_0} \frac{d^3 k'}{k'_0} dS^\nu \quad (7.85)$$

y por tanto solucionado parcialmente ésta ecuación se llega a

$$i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint (\gamma_k + \gamma_{k'}) A_{k_\mu} \delta A^{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k \frac{d^3k'}{k'_0}. \quad (7.86)$$

Éste resultado se logra con $x_0 = \text{constante}$ y $k_\nu \frac{dS^\nu}{k_0} = k_i k_0 \frac{dS^\nu}{k_0} = k_i dS^\nu dx_i$, para x_1 se integra resultando,

$$\int e^{i(k_{x_1} + k'_{x_1})x_1} k_\nu dx_1 = 2\pi \delta(k_{x_1} + k'_{x_1}) e^{(k_0 + k'_0)x_0}. \quad (7.87)$$

El resto de las integrales para x_2 y x_3 tienen resultados idénticos matemáticamente, resultando finalmente

$$8\pi^3 \delta(k + k') e^{(k_0 + k'_0)x_0} \quad (7.88)$$

pues $\delta^3(k) = \delta(k_1)\delta(k_2)\delta(k_3)$.

Se observa claramente que el delta de Dirac hace que el integrando se anule para todos los puntos excepto para $k'_i = -k_i$, lo cual implica que $k'_0 = \pm k_0$. Entonces usando $\gamma_{-l} = \gamma_l$ la integral se reduce a

$$i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A^{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \quad (7.89)$$

con $\gamma_{-l} = \gamma_l$, si $k'_i = -k_i$ y $k'_0 = \pm k_0$ entonces $\gamma_{k'} = \gamma_{-k} = \gamma_k$ y por tanto $\delta^3(k + k') = 1$. Así se integra dando

$$\begin{aligned} i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A^{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\ = i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{2\gamma_k}{-k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A^{k'_\mu} d^3k \end{aligned} \quad (7.90)$$

y si si $k'_0 = +k_0$ y $k'_i = -k_i$ entonces se integra dando

$$\begin{aligned} i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A^{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\ = i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k_0, k_i}}{k_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k_0, -k_i} e^{2ik_0 x_0} d^3k, \end{aligned} \quad (7.91)$$

finalmente la solución es

$$\begin{aligned}
i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\
= -2i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{2\gamma_k}{-k_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} d^3k \\
+ i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k_0, k_i}}{k_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k_0, -k_i^\mu} e^{2ik_0x_0} d^3k. \quad (7.92)
\end{aligned}$$

Pero $(\gamma_k + \gamma_{k_0, k_i}) A_{k_\mu} \delta A_{k_0, -k_i^\mu} = \delta(\gamma_k A_{k_\mu} A_{k_0, -k_i^\mu})$, pues $\gamma_k + \gamma_{k_0, k_i} = \delta\gamma_k$ y $A_{k_\mu} \delta A_{k_0, -k_i^\mu} = \delta A_{k_\mu}$, lo que forma un diferencial exacto quedando

$$\begin{aligned}
i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\
= -2i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{2\gamma_k}{-k_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} d^3k + i\pi^2 \delta \sum_{k_0} \int \gamma_k A_{k_\mu} A_{k_0} e^{2ik_0x_0} \frac{d^3k}{k_0}. \quad (7.93)
\end{aligned}$$

El segundo término se descarta porque es un diferencial exacto y no afecta las ecuaciones de movimiento. Finalmente,

$$\begin{aligned}
i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\
= -2i\pi^2 \sum_{k_0} \int \left(\frac{2\gamma_k}{-k_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} d^3k. \quad (7.94)
\end{aligned}$$

Si $k_0 > 0$, usando $\begin{cases} A_{-k_\mu} = -\bar{A}_{k_\mu} \\ A_{-k_\mu}^* = -\bar{A}_{k_\mu}^* \\ \gamma_{-l} = \gamma_l \end{cases}$ entonces la ecuación se modifica a,

$$\begin{aligned}
i\pi^2 \sum_{k_0, k'_0} \iint \left(\frac{\gamma_k + \gamma_{k'}}{k'_0} \right) A_{k_\mu} \delta A_{k'_\mu} e^{i(k_0 + k'_0)x_0} \delta^3(k + k') d^3k d^3k' \\
= -2i\pi^2 \sum_{k_0} \int \gamma_k \left(\bar{A}_{k_\mu} \delta A_{k_\mu} - A_{k_\mu} \delta \bar{A}_{k_\mu} \right) \frac{d^3k}{k_0}. \quad (7.95)
\end{aligned}$$

Debido a que $A_{-k_\mu} (\gamma_{-k} \delta A^{k_\mu}) = -A_{+k_\mu} \gamma_{+k} \delta \bar{A}^{k_\mu}$, $\gamma_{-k} A_{-k_\mu} = \gamma_k \bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu}$ y usando $\delta (\bar{A}_{k_\mu} A^{k_\mu}) = \delta \bar{A}_{k_\mu} A^{k_\mu} + \bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu}$ se llega a $\delta (\bar{A}_{k_\mu} A^{k_\mu}) - 2 \bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu} = \delta \bar{A}_{k_\mu} A^{k_\mu} - \bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu}$ y así,

$$\begin{aligned} & -2i\pi^2 \int \gamma_k (\bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu} - A_{k_\mu} \delta \bar{A}^{k_\mu}) \frac{d^3 k}{k_0} \\ & = -2i\pi^2 \delta \int \gamma_k \bar{A}_{k_\mu} A^{k_\mu} \frac{d^3 k}{k_0} - 4i\pi^2 \int \gamma_k \bar{A}_{k_\mu} \delta A^{k_\mu} \frac{d^3 k}{k_0} \end{aligned} \quad (7.96)$$

donde el primer término de la integral no se tiene en cuenta debido a las razones anteriormente expuestas. Finalmente la variación de la acción queda,

$$\begin{aligned} \delta I = \sum_{e+g} m \frac{dz_\mu}{ds} \Delta z^\mu + \sum_e e A_\mu(z) \Delta z^\mu + \sum_g g \int_0^\infty F_{\mu\nu}^{\dagger*} \delta y^\mu \left(\frac{dy^\mu}{d\tau_1} \right) d\tau_1 \\ - 4i\pi^2 \int \gamma_k \bar{A}_{k_\mu} \delta^{k_\mu} \frac{d^3 k}{k_0}, \end{aligned} \quad (7.97)$$

donde z_μ son las coordenadas dinámicas de las partículas cuando dejan de existir; $y_\mu(\tau_1)$ son las coordenadas de los puntos sobre las cuerdas cuando éstas dejan de existir y que construyen un continuo unidimensional de coordenadas para cada polo; para cada valor de μ y A_{k_μ} son las componentes de Fourier (con $k_0 > 0$) de los potenciales después que las partículas y las cuerdas han dejado de existir. Los coeficientes en la ecuación (7.97) serán los momentos conjugados. Así los momentos de una partícula cargada son $p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds} + e A_\mu(z)$ y los de una partícula con polo serán $p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds}$. El momento conjugado a las variables de la cuerda $\beta^\mu(\tau_1) \equiv y^\mu(\tau_1)$ son $\beta^\mu(\tau_1) = g F_{\mu\nu}^{\dagger*} \frac{dy^\mu}{d\tau_1}$ y el momento conjugado a A_{k_μ} está dado por $-\frac{4i\pi^2}{k_0} \gamma_k \bar{A}_{k_\mu}$. El momento $\beta^\mu(\tau_1)$ forma un continuo unidimensional de variables que corresponde al continuo unidimensional de las coordenadas $y^\mu(\tau_1)$ y el momento de campo conjugado a A_{k_μ} forma un continuo tridimensional que corresponde al continuo tridimensional de las coordenadas de campo.

Para las coordenadas y los momentos de cada partícula se definen los brackets de Poisson de la forma

$$\begin{aligned} \{p_\mu, z_\nu\} &= \left\{ m \frac{dz_\mu}{ds} + e A_\mu(z), z_\nu \right\} = \left\{ m \frac{dz_\mu}{ds}, z_\nu \right\} + \{e A_\mu(z), z_\nu\} \\ &= \left\{ m \frac{dz_\mu}{ds}, z_\nu \right\} = g_{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (7.98)$$

para las coordenadas y los momentos de la cuerda

$$\{\beta^\mu(\tau_1), y_\nu(\tau'_1)\} = g_{\mu\nu}\delta(\tau_1 - \tau'_1), \quad (7.99)$$

para las variables de campo

$$\begin{aligned} \{\bar{A}_{k_\mu}, A_{k'_\nu}\} &= \left\{ -\frac{4i\pi^2}{k_0} \gamma_k \bar{A}_{k_{mu}}, A_{k'_\nu} \right\} = \frac{ik_0}{4\pi^2 \gamma_k} \{A_{k_{mu}}^*, A_{k'_\nu}\} \\ &= \frac{ik_0}{4\pi^2 \gamma_k} g_{\mu\nu} \delta^3(k - k') \end{aligned} \quad (7.100)$$

y todos los otros brackets de Poisson son cero.

Usando $p_\mu - eA_\mu(z) = m \frac{dz_\mu}{ds}$ y $p_\mu = m \frac{dz_\mu}{ds}$, con el fin de eliminar la velocidad para cada partícula cargada, se obtiene

$$\begin{aligned} [p_\mu - eA_\mu(z)]^2 &= [p_\mu - eA_\mu(z)] [p^\mu - eA^\mu(z)] = \left(m \frac{dz_\mu}{ds} \right)^2 = m^2 \\ \Rightarrow [p_\mu - eA_\mu(z)] [p^\mu - eA^\mu(z)] - m^2 &= 0 \end{aligned} \quad (7.101)$$

y para cada polo la ecuación es

$$p_\mu p^\mu = m^2 \Rightarrow p_\mu p^\mu - m^2 = 0, \quad (7.102)$$

que deben estar unidas con

$$\beta^\mu(\tau_1) - g F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau_1} = 0, \quad (7.103)$$

donde los potenciales $A_\mu(z)$ en las anteriores ecuaciones están dados por las componentes de Fourier, $A_{k_\mu}(z)$ y $\bar{A}_{k_\mu}(z)$. Las ecuaciones (7.101), (7.102) y (7.103) solo relacionan coordenadas y momentos dinámicos. Son ecuaciones diferenciales satisfechas por la integral de acción I cuando los momentos se ven como derivadas de I y son ecuaciones de Hamilton-Jacobi de la teoría de los polos magnéticos. Las condiciones suplementarias (7.67) deben ser tratadas como ecuaciones de Hamilton-Jacobi y éstas ecuaciones obtenidas tomando diferentes puntos del campo x no son independientes de las ecuaciones de movimiento o entre si y de esta manera se obtiene una serie completa e independiente de ellas haciendo una transformación de Fourier en la región entre S_P y S_F . En ésta región, usando la función de Pauli-Jordan (7.26), se

pede reemplazar $J(x-z)$ por $\Delta(x-z)$ cuya trasformada de Fourier está dada por

$$\Delta(x-z) = -\frac{i}{4\pi^2} \sum_{k_0} \int e^{ik(x-z)} \frac{d^3k}{k_0} \quad (7.104)$$

entonces se obtienen,

$$k^\nu \gamma_k A_{k_\nu} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{-ikz} = 0, \quad k^\nu \gamma_k \bar{A}_{k_\nu} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{+ikz} = 0 \quad (7.105)$$

que son las ecuaciones que envuelven solamente variables dinámicas de coordenadas y momentos y que son conformadas de la manera correcta para construir las ecuaciones de Hamilton-Jacobi.

VII. Cuantización

Para cuantizar se reemplazan las coordenadas dinámicas y el momento de la teoría clásica por operadores que satisfagan las reglas de conmutación

$$\begin{aligned} \{p_\mu, z_\nu\} &= g_{\mu\nu} \\ \{\beta^\mu(\tau_1), y_\nu(\tau'_1)\} &= g_{\mu\nu} \delta(\tau_1 - \tau'_1) \\ \{\bar{A}_{k_\mu}, A_{k'_\nu}\} &= \frac{ik_0}{4\pi^2 \gamma_k} g_{\mu\nu} \delta^3(k - k') \end{aligned} \quad (7.106)$$

y entonces se reemplaza las ecuaciones de Hamilton-Jacobi por ecuaciones de onda obtenidas igualando a cero las miembros izquierdos de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi, que están escritas en función de operadores, y que que están aplicadas a la función de onda ψ . Las ecuaciones de onda obtenidas de ésta manera son consistentes entre si debido a que los operadores sobre ψ en sus miembros izquierdos conmutan y esto es debido a la anulación de los miembros izquierdos de los brackets de Poisson de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi. La solución da como resultado ecuaciones de onda para partículas sin espín; para los electrones se reemplazan por las ecuaciones de onda de espín $\frac{1}{2}\hbar$. Debido a la falta de información sobre los polos, se supone con espín $\frac{1}{2}\hbar$.

Con las matrices de espín usuales $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_m$, para cada partícula cargada existe una ecuación de la forma,

$$\{p_0 - eA_0(z) - \alpha_r [p_r - eA_r(z)] - \alpha_m m\} \psi = 0, \quad (7.107)$$

para cada partícula con un polo,

$$[p_0 - \alpha_r p_r - \alpha_m m] \psi = 0, \quad (7.108)$$

para cada cuerda,

$$\left[\beta_\mu(\tau_1) - g F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{y^\mu}{d\tau_1} \right] \psi = 0, \quad (7.109)$$

y para las variables de campo,

$$\left(k^\nu \gamma_k A_{k\nu} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{-ikz} \right) \psi = 0, \quad \left(k^\nu \gamma_k \bar{A}_{k\nu} - \frac{1}{4\pi^2} \sum_e e e^{+ikz} \right) \psi = 0. \quad (7.110)$$

La función de onda ψ se podría tomar como una función de las variables de la partícula z_μ , de las variables de espín disponibles para cada partícula, de las variables de la cuerda $y_\mu(\tau_1)$ con rango $0 < \tau_1 < \infty$ y de las variables de campo A_{k_μ} . Dicha función estará definida solamente cuando los puntos z_μ , $y_\mu(\tau_1)$ estén fuera de los conos de luz de las otras partículas.

La ecuación (7.108) sugiere que el campo electromagnético no actúa sobre los polos pero si sobre las cuerdas (ec. (7.109)) y debido a que los polos están restringidos a los extremos de las cuerdas entonces el campo no afecta el movimiento de los polos.

VIII. La carga y el polo unitarios

La integral de acción de la teoría clásica podría ser considerada como una función de puntos espacio-temporales z_μ donde las partículas dejan de existir, de las líneas $y_\mu(\tau_1)$ en el espacio-tiempo donde las cuerdas dejan de existir y de las variables de campo apropiadas. Ésta acción está definida siempre que las cuerdas no pasen a través de cualquiera de los puntos z_μ donde las partículas cargadas dejan de existir.

Se mantendrán todos los puntos de las partículas (z_μ) fijos y también fijas todas las cuerdas excepto una que variará continuamente manteniéndola siempre en la superficie tridimensional S_P situada alrededor de uno de los puntos z_μ donde una partícula cargada está situada justamente antes que deje de existir y luego regrese a su posición original. Al mismo tiempo los potenciales $A_\mu(x)$ son variados continuamente con el objetivo de preservar las ecuaciones (7.10) y (7.22) con valores fijos para el campo $F_{\mu\nu}(x)$ y que retoman los valores originales junto con la cuerda. Debido a que la deformación

no puede ser restituida continuamente en la acción entonces una cuerda no puede pasar a través de una partícula cargada. La cuerda se extiende sobre una superficie cerrada bidimensional σ , permaneciendo en S_P y encerrando el punto z_μ donde se sitúa la carga y dicha superficie no puede ser encogida continuamente a cero debido a que no debe pasar a través de una carga. Sin embargo se espera variar la acción I bajo éste proceso de deformación. Una pequeña variación de una cuerda y de los potenciales con los z_μ fijos lleva a una variación de I (DI), dada por la suma de los miembros derechos de las ecuaciones (7.71) y (7.72) dada por

$$DI = \frac{1}{8\pi} \int_{-\infty}^{S_F} \left[\left(\frac{\partial A_\nu^*}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu}^* \right) \frac{\partial \delta A^\mu}{\partial x_\nu} + \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - F_{\mu\nu} \right) \frac{\partial \delta A^{\mu*}}{\partial x_\nu} \right] d^4x \\ + \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{S_F} (F_{\mu\nu}^* \delta G^{\dagger\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta G^{\dagger\mu\nu*}) d^4x; \quad (7.111)$$

debido a que los tensores electromagnéticos normal y dual se mantienen fijos y que los cuadri-potenciales normal y dual son regresados a sus valores originales, entonces la variación de la acción se modifica a

$$DI = \frac{1}{4} \sum_g \int_{-\infty}^{S_F} (F_{\mu\nu}^* \delta G^{\dagger\mu\nu} + F_{\mu\nu} \delta G^{\dagger\mu\nu*}) d^4x, \quad (7.112)$$

que como ya anteriormente se explicó se puede reparametrizar como (ver la ec. (7.70))

$$DI = \sum_g \int_0^\infty F_{\mu\nu}^{\dagger*} \delta y^\mu \left(\frac{dy^\nu}{d\tau_1} \right) d\tau_1. \quad (7.113)$$

Se observa que para un proceso de deformación cerrado los parámetros de los que depende el punto sobre la lámina y^μ ya no son importantes debido a que no se desea la descripción de la línea de mundo del polo y por tanto

$$DI = g \int F_{\mu\nu}^{\dagger*} \delta y^\nu dy^\mu, \quad (7.114)$$

donde $\delta y^\nu dy^\mu$ es un elemento diferencial de la superficie bidimensional extendida por la cuerda y estará definido por $d\sigma^{\mu\nu}$. De esta manera la variación de la acción será,

$$DI = g \int F_{\mu\nu}^{\dagger*} \sigma^{\nu\mu}. \quad (7.115)$$

La integral resultante tiene la forma matemática de una divergencia y por tanto definirá el flujo eléctrico total que pasa a través de la superficie σ dando como resultado: $DI = 4\pi ge$.

Se podría rodear cualquier carga con una cuerda por un número indefinido de ciclos y por tanto la incertidumbre total en I está dada por la suma (suma sobre todas las cargas e y sobre todos los polos g) $4\pi \sum_{ge} m_{ge} ge$, donde m_{ge} es un coeficiente arbitrario que define un análogo al peso estadístico de cada uno de los términos de la suma.

Asociando el comportamiento no univaluado de la integral de acción I de la teoría de los polos con el de la acción de algunas de las cantidades físicas, se puede observar que es posible usar la regla de cuantización de Bohr para cada carga y polo, resultando (para $c = 1$)

$$4\pi ge = nh, \quad (7.116)$$

donde n es un entero. Usando el momento angular de Planck $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ la ecuación queda como

$$ge = \frac{n}{2}\hbar c. \quad (7.117)$$

Este resultado puede ser obtenido por la teoría desarrollada en la capítulo **VII. Cuantización** sin la regla de cuantización de Bohr que comprende cuatro postulados que determinan: la forma de la órbita del electrón alrededor del núcleo (sin radiar energía electromagnética) y su relación con la Ley de Coulomb, su limitación entre la infinita cantidad de órbitas (mecánica clásica) y solo en las que el momento angular es un múltiplo entero de la constante de Planck y el cambio de órbita mediante la radiación de energía electromagnética.

Aprovechando el segundo postulado se puede usar la condición que la función de onda debe ser univaluada. Para las coordenadas y momentos de la cuerda, cuyo conmutador está dado por la ec. (7.99), $\{\beta^\mu(\tau_1), y_\nu(\tau'_1)\} = g_{\mu\nu}\delta(\tau_1 - \tau'_1)$, (usando el hecho que $\beta^\mu(\tau_1) = i\hbar \frac{\partial}{\partial y_\mu(\tau_1)}$, debido a que éste es un operador momento) y donde se observa que el momento de la cuerda puede ser definido mediante la ec. (7.109), $[\beta_\mu(\tau_1) - gF_{\mu\nu}^*(y)\frac{y^\nu}{d\tau_1}] \psi = 0$ como

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial y_\mu(\tau_1)} = gF_{\mu\nu}^*(y) \frac{dy^\nu}{d\tau_1} \psi, \quad (7.118)$$

mostrando la manera como la función de onda varía cuando las coordenadas de la cuerda se modifican. Si una cuerda es desplazada y se curva sobre una

superficie bidimensional σ , usando la ec. (7.118) se puede observar que

$$\frac{d\psi}{\psi} = \frac{g}{i\hbar} F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau_1} dy_\nu(\tau_1) \quad \therefore \quad \int \frac{d\psi}{\psi} = -\frac{ig}{\hbar} \int F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau_1} dy_\nu. \quad (7.119)$$

Integrando se obtiene

$$\psi = e^{-\frac{ig}{\hbar} \int F_{\mu\nu}^{\dagger*}(y) \frac{dy^\mu}{d\tau_1} dy_\nu}, \quad (7.120)$$

por tanto la función de onda ψ queda multiplicada por

$$e^{-\frac{ig}{\hbar} \int F_{\mu\nu}^{\dagger*} d\sigma^{\mu\nu}}, \quad (7.121)$$

donde se puede observar que $F_{\mu\nu}^{\dagger*}$ ocurriendo en diferentes puntos del integrando conmutan entre si, lo que podría ser una analogía a una transformación local de campos. Debido a que ψ es univaluada, éste debe retomar su valor inicial y por tanto la fase (7.121) debe ser unitaria. Para que esto sea posible se debe cumplir la igualdad $\frac{g}{\hbar} \int F_{\mu\nu}^{\dagger*} d\sigma^{\mu\nu} = 2\pi n$ siendo n un entero. Se puede observar que ésta condición vuelve a definir la ecuación (7.116), $4\pi g e = n\hbar$. Finalmente la conclusión a la que se llega es que [10]:

...la cuantización de las ecuaciones de movimiento de las partículas cargadas y de las partículas con polo, es posible solamente condicionando a las cargas y a los polos a que deben ser múltiplos integrales de una unidad de carga e_0 y de una unidad de polo g_0 satisfaciendo, $e_0 g_0 = \frac{1}{2} \hbar c$

Capítulo 8

Incoherencias en la Teoría del Monopolo Magnético

Durante muchos años los físicos han intentado hallar el monopolo infructuosamente. El intento de explicar las discontinuidades inherentes en la teoría de Dirac o cuerdas de Dirac y sus resultados negativos en la medición experimental, han llevado a artificios físicos y matemáticos que han hecho que la teoría sea poco natural. Actualmente existen sistemas de monopolos y campos que son duales a la electrodinámica clásica (EDC) con los cuales se pueden explicar la supuesta falta de simetría de ésta (ver capítulo (6.0.3)). A pesar de esto muchos científicos han seguido investigando y usando las cuerdas de Dirac en la teoría del monopolo.

Las ecuaciones de Maxwell, que gobiernan el movimiento de los campos electromagnéticos son,

$$\begin{aligned}\partial_\nu F_e^{\mu\nu} &= -4\pi J_e^\mu \\ \partial_\nu F_e^{*\mu\nu} &= 0\end{aligned}\tag{8.1}$$

y en ellas están contenidas las ecuaciones de Maxwell y la relatividad especial de Einstein (ver Capítulos 3 y 4). La fuerza ejercida sobre toda la materia que posee carga está definida por la fuerza de Lorentz en cuatro dimensiones o la quadri-fuerza de Lorentz,

$$q_e F_e^{\mu\nu} v_\nu = m a_e^\mu\tag{8.2}$$

donde el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$, está definido según lo dicho en el

Capítulo 4. El tensor electromagnético dual (ver Cap. 4) se define como

$$F^{*\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta} \quad (8.3)$$

el cual es totalmente antisimétrico, justamente como $F^{\mu\nu}$ también lo es. La relación intrínseca entre estos dos tensores y la definición de la densidad Lagrangiana

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_e^{\mu\nu}F_{e,\mu\nu} - J_e^\mu A_{e,\mu} \quad (8.4)$$

lleva a realizar transformaciones duales que conducen a las ecuaciones de Maxwell duales, las cuales son usadas para definir la teoría de un sistema de monopolos con sus campos electromagnéticos de la forma,

$$\begin{aligned} \partial_\nu F_m^{*\mu\nu} &= -4\pi J_m^\mu \\ -\partial_\nu F_m^{\mu\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (8.5)$$

en las cuales están contenidas las ecuaciones de movimiento de Maxwell para los campos monopulares. La quadri-fuerza sobre la materia monopolar es de forma análoga a la ejercida sobre la materia cargada

$$q_h F_m^{*\mu\nu} v_\nu = m a_m^\mu. \quad (8.6)$$

La densidad Lagrangiana del monopolo está dada por

$$L = -\frac{1}{16\pi}F_m^{*\mu\nu}F_{*m,\mu\nu} - J_m^\mu A_{m,\mu}. \quad (8.7)$$

Con éstas dos teorías se puede observar que [17] ninguna de éstas relaciona las dos cargas (eléctrica y magnética), pues cada teoría contiene las ecuaciones de movimiento así como la ecuación de la dinámica para una carga y no la relaciona con la otra. Dichas teorías deberían conformar una nueva teoría carga eléctrica-monopolo magnético en la cual, en los límites en los que una de las cargas no exista sobreviva la otra. Pero en la teoría de los monopolos de Dirac si se calcula el límite en el que la carga eléctrica no exista, no se recuperan las ecuaciones de Maxwell en el espacio normal. A pesar que la teoría de Dirac se construya bajo la suposición (deseable) que tanto la carga eléctrica como el monopolo tengan propiedades dinámicas iguales, ésto lleva a inconsistencias físicas tales como las cuerdas de Dirac.

Por ejemplo los campos electromagnéticos radian con las condiciones $E^2 =$

B^2 y $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ que son bien conocidas en las ondas electromagnéticas y cuyo significado es que los campos se mueven oscilatoriamente de manera perpendicularmente a la velocidad de radiación o de propagación de la onda electromagnética lo que muestra de nuevo un grado de simetría que está en total desacuerdo con una singularidad de cuerda.

Adicionalmente aunque con la teoría de Dirac al modificar a 'mano' algunas de las ecuaciones de la dinámica electromagnética y/o de la acción (ver el capítulo 7) para reproducir la electrodinámica llamándola nueva electrodinámica y que no es posible derivarla de una función Lagrangiana electromagnética corriente por lo que las variables canónicas no estarán bien definidas y por tanto la función Hamiltoniana será muy difícil de obtener; adicionalmente la carga magnética transforma como un pseudoescalar y no como un escalar lo que dificulta el entendimiento físico.

Existen muchos artículos de investigación donde se describen los inconvenientes de los polos de Dirac para casos específicos como el de Daniel Zwazinger [20] donde explica que éstos son prohibidos en la teoría de la matriz de dispersión debido a que dicha teoría es invariante de Lorentz y los polos de Dirac no respetan dicha invarianza lo cual está muy bien determinado en [5] donde analiza la no-covarianza del monopolo de Dirac resultando una incompatibilidad con la teoría cuántica de campos que para solucionarla habría que redefinir muchos conceptos básicos de ésta. En fin hay mucha literatura al respecto pero el problema fundamental es la definición física de las cuerdas de Dirac y el entendimiento matemático de la aplicación del teorema de Stokes debido a que éste no se define en todo el espacio por la divergencia generada por la cuerda de Dirac.

Capítulo 9

Apéndices

9.1. Delta de Dirac

La función delta de Dirac es una función de distribución que permite definir puntos matemáticos de discontinuidades en el espacio. Un ejemplo muy claro es su uso para definir una carga puntual. El delta de Dirac está definido por las relaciones $\delta(x) = 0$ para $x \neq 0$ y $\int \delta(x)dx = 1$ si $x = 0$ y donde la región de integración incluye $x = 0$. Para una función arbitraria $\int f(x)\delta(x)dx = f(0)$, donde la región de integración incluye $x = 0$. La representación del delta de Dirac está dado por $\delta(y) = \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sin(hy)}{\pi y}$, [26], [[25]. La integración se logra usando

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\omega_z - \sigma_z)z} dz &= \lim_{h \rightarrow \infty} \int_{-h}^h e^{(\omega_z - \sigma_z)z} dz = 2 \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\sin[h(\omega_z - \sigma_z)]}{(\omega_z - \sigma_z)} \\ &= 2\pi\delta((\omega_z - \sigma_z)). \end{aligned} \quad (9.1)$$

La relación de ortonormalidad se construye

$$\int u_i^*(\mathbf{r})u_j(\mathbf{r})d^3r = \delta(\omega_x - \sigma_x)\delta(\omega_y - \sigma_y)\delta(\omega_z - \sigma_z) \equiv \delta^3(\omega - \sigma). \quad (9.2)$$

En un intervalo $(-x, x)$ siendo α una cantidad positiva se impone la condición,

$$\delta^\alpha(x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} & \text{para } -\frac{\alpha}{2} < x < \frac{\alpha}{2} \\ 0 & \text{para } |x| > \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (9.3)$$

de forma tal que en dicho intervalo la función delta tomará el valor $\frac{1}{\alpha}$ forma una especie de pico. Si se integra sobre las x en ese mismo intervalo y sobre una función arbitraria $f(x)$ (bién definida en $x = 0$), entonces se tiene que $\int_{+x}^{-x} \delta^\alpha(x) f(x) dx$ y teniendo en cuenta que $f(x) \simeq f(0)$ entonces $\int_{+x}^{-x} \delta^\alpha(x) f(x) dx \simeq f(0) \int_{+x}^{-x} \delta^\alpha(x) dx = f(0)$. Si α es muy pequeña entonces la aproximación será mejor y por tanto al evaluar el límite cuando tiende a cero se verifica

$$\int_{+x}^{-x} \delta(x) f(x) dx = f(0), \quad (9.4)$$

y de forma más general

$$\int_{+\infty}^{-\infty} \delta(x) f(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (9.5)$$

Algunas de las propiedades de la función delta de Dirac son:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= \delta(-x) \\ \frac{d\delta(x)}{dx} &= -\frac{d\delta(-x)}{dx} \\ x\delta(x) &= 0 \\ x\frac{d\delta(x)}{dx} &= -\delta(x) \\ \delta(ax) &= \frac{1}{a}\delta(x) \\ \delta(x^2 - a^2) &= \frac{1}{2a}[\delta(x - a) + \delta(x + a)] \\ \int \delta(a - x)\delta(x - b)dx &= \delta(a - b) \\ f(x)\delta(x - a) &= f(a)\delta(x - a) \end{aligned} \quad (9.6)$$

Usando la ecuación (9.5) y

$$\begin{aligned} \tilde{F}(k) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} F(x) dx \\ F(x) &= (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} \tilde{F}(k) dk, \end{aligned} \quad (9.7)$$

la relación entre el delta de Dirac y Fourier está dada por

$$\tilde{\delta}(k) = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_0) dx. \quad (9.8)$$

En los textos [24], [26], [25], [23] se puede profundizar más sobre éste tema.

9.2. Función de Pauli-Jordan

La función de conmutación de Pauli-Jordan (FPJ) está dada por,

$$\Delta(x - y) = i[\varphi(x), \varphi(y)] \quad (9.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta(x) &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-ikx} \varepsilon(k^0) \delta(k^2 - m^2) dk \\ &= \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{dk}{(k^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} e^{ikx} \sin[x^0(k^2 - m^2)]^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (9.10)$$

donde se verifica que su variación temporal está relacionada con la función delta de Dirac de la forma:

$$\left. \frac{\partial \Delta(x^0, \mathbf{x})}{\partial x^0} \right|_{x^0=0} = \delta(\mathbf{x}). \quad (9.11)$$

9.3. Ecuación de Laplace en Coordenadas Esféricas (CE)

La ecuación de Laplace en CE se escribe como,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\mathcal{F}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi^2} = 0 \quad (9.12)$$

Si se asume una solución de variables separables de la forma $\mathcal{F} = \frac{R(r)}{r} \Theta(\theta) \Phi(\phi)$, al reemplazarla en la ecuación, y después de reordenar los términos ésta queda,

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = 0. \quad (9.13)$$

Si se elige una constante de separación $-m^2$, entonces se verifica la ecuación diferencial,

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -m^2 \Phi, \quad (9.14)$$

cuya solución es,

$$\Phi = e^{\pm im\phi} \quad (9.15)$$

donde m debe ser un entero, pues si no lo es, la función $\Phi(\phi)$ puede ser multivaluada. El resto de la ecuación es entonces,

$$r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) \right] = -m^2 \quad (9.16)$$

y por tanto

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = -\frac{m^2}{\sin^2 \theta}. \quad (9.17)$$

Separando variables de nuevo con una nueva constante de separación $l(l+1)$, se llega a

$$\frac{r^2}{R} \frac{d^2 R}{dr^2} = l(l+1) \quad (9.18)$$

despejando se obtiene,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = \frac{l(l+1)}{r^2} R \quad (9.19)$$

donde $l(l+1)$ es otra constante. La solución de ésta ecuación está dada por funciones hiperbólicas,

$$R = \mathcal{R}_1 e^{l+1} + \mathcal{R}_2 e^{-l}. \quad (9.20)$$

finalmente se tiene la última ecuación diferencial,

$$\frac{1}{\sin \theta \Theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = -l(l+1) \quad (9.21)$$

la cual se reorganiza a

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) = \left[-l(l+1) + \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] \Theta. \quad (9.22)$$

Si se realiza el cambio de variable $x = \cos \theta$, entonces $dx = -\sin \theta d\theta = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}} d\theta$, y $\sin^2 \theta = 1-x^2$. Por tanto la ecuación queda,

$$-\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{d\Theta}{dx} \right] = \left[-l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta. \quad (9.23)$$

Finalmente haciendo $P(x) = \Theta(x)$, se tiene la ecuación,

$$-\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] = \left[-l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] P, \quad (9.24)$$

a la que se le llama ecuación generalizada de Legendre. La solución de ésta ecuación se escribe como un serie de potencias,

$$P(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (9.25)$$

donde el parámetro α no se conoce. Al derivarla da,

$$\frac{dP(x)}{dx} = \alpha x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} \quad (9.26)$$

y por tanto

$$\begin{aligned} (1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} = & \alpha x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j + x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ & - \alpha x^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - x^{\alpha+2} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

Derivando nuevamente y reemplazando en la ecuación generalizada de Legendre,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP(x)}{dx} \right] - \left[-l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] P(x) = & \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \\ & + \alpha x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} + \alpha x^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} + x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} \\ & - \alpha(\alpha+1)x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j - \alpha x^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} - (\alpha+2)x^{\alpha+1} \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} \\ & - x^{\alpha+2} \sum_{j=0}^{\infty} j(j-1) a_j x^{j-2} - \left[-l(l+1) + \frac{m^2}{1-x^2} \right] x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0, \end{aligned} \quad (9.28)$$

donde se verifican las ecuaciones,

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} - \left[-l(l + 1) + \frac{m^2}{1 - x^2} \right] x^\alpha \right. \\
 & \quad \left. - \alpha(\alpha + 1)x^\alpha \right\} \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j = 0 \\
 & [2\alpha x^{\alpha-1} - \alpha x^{\alpha+1} - (\alpha + 2)x^{\alpha+1}] \\
 & \quad \cdot \sum_{j=0}^{\infty} j a_j x^{j-1} = 0 \\
 & [x^\alpha - x^{\alpha+2}] \sum_{j=0}^{\infty} j(j - 1) a_j x^{j-2} = 0.
 \end{aligned} \tag{9.29}$$

que al solucionarlas y al reemplazar los valores en la ecuación original, (ver [6], [9], [24] y [23]) se llega a una función recursiva para la variable a_j de la forma,

$$a_{j+2} = \frac{(\alpha + j)(\alpha + j + 1) - l(l + 1)}{(\alpha + j + 1)(\alpha + j + 2)} a_j, \tag{9.30}$$

lo que da la solución de las funciones $P_j(x)$ en forma de polinomios, los cuales toman el nombre de polinomios de Legendre, que se compactan mediante la fórmula de Rodriguez como,

$$P_j(x) = \frac{1}{2^j j!} \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j. \tag{9.31}$$

Algunos términos de la serie son:

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= \frac{1}{2} (3x^2 - 1) \\
 P_3(x) &= \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) \\
 P_4(x) &= \frac{1}{8} (35x^4 - 30x^2 + 3) \\
 P_5(x) &= \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) \\
 P_6(x) &= \frac{1}{16} (231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5) \\
 P_7(x) &= \frac{1}{16} (429x^7 - 639x^5 + 315x^3 - 35x) \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

9.3.1. Aplicaciones en la Electrodinámica

Una de las aplicaciones más usadas de los Polinomios de Legendre y las funciones de Rodrigues está en la expansión multipolar, que es necesaria en la teoría de radiación. Los polinomios ayudan a expandir funciones tales como,

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{r'^l}{r^{l+1}} P_l(\cos \gamma) \tag{9.33}$$

para la restricción multipolar, $r > r'$, la que es usada, por ejemplo, para calcular el potencial de una carga puntual, el cual usando el eje z como eje de simetría da,

$$\Phi(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} [A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}] P_l(\cos \gamma) \tag{9.34}$$

donde A_l y B_l se hallan con las condiciones de frontera del problema.

La expansión multipolar puede realizarse primero haciendo una expansión de Taylor de una función arbitraria $\mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ alrededor del origen $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ de la

forma,

$$\mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) = \mathcal{F}(\mathbf{R}) + \sum_{i=x,y,z} r_i \mathcal{F}_i(\mathbf{R}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=x,y,z} r_i r_j \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{R}) + \dots \quad (9.35)$$

donde

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{R}) \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{\partial r_i} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} \quad (9.36)$$

y

$$\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{R}) \equiv \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{\partial r_i \partial r_j} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{0}}. \quad (9.37)$$

Si $\mathcal{F}_i(\mathbf{r} - \mathbf{R})$ satisface la ecuación de Laplace

$$[\nabla^2 \mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R})]_{\mathbf{r}=\mathbf{0}} = \sum_{i=x,y,z} \mathcal{F}_{ii}(\mathbf{R}) = 0, \quad (9.38)$$

entonces la expansión se escribe tensorialmente de la forma,

$$\sum_{i,j=x,y,z} r_i r_j \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{R}) = \frac{1}{3} \sum_{i,j=x,y,z} (3r_i r_j - \delta_{ij} r^2) \mathcal{F}_{ij}(\mathbf{R}) \quad (9.39)$$

si se considera $\mathcal{F}(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \equiv \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$, entonces $\mathcal{F}(\mathbf{R}) = \frac{1}{R}$, $\mathcal{F}_i(\mathbf{R}) = \frac{R_i}{R^3}$, $\mathcal{F}_{ij}(\mathbf{R}) = \frac{3R_i R_j - \delta_{ij} R^2}{R^5}$, etc, definiendo, respectivamente, el monopolo, el dipolo y el cuadrupolo por

$$\begin{aligned} q_T &\equiv \sum_{i=1}^N q_i \\ P_i &\equiv \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha r_{\alpha i} \\ P_{ij} &\equiv \sum_{\alpha=1}^N q_\alpha (3r_{\alpha i} r_{\alpha j} - \delta_{ij} r_\alpha^2) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (9.40)$$

donde se obtiene la expansión multipolar de la función escalar, denominada potencial total $\Phi(\mathbf{R})$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i \mathcal{F}(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \\ &= \frac{q_T}{R} + \frac{1}{R^3} \sum_{i=x,y,z} P_i R_i \\ &\quad + \frac{1}{6R^5} \sum_{i,j=x,y,z} Q_{ij} (3R_i R_j - \delta_{ij} R^2) + \dots\end{aligned}\quad (9.41)$$

Si se aproxima a dos cargas, entonces el potencial dipolar eléctrico estará dado por,

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3}.\quad (9.42)$$

En coordenadas esféricas toma la forma (ver referencias [6], [9], [24] y [23]),

$$\Phi(\mathbf{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-1)^m I_l^{-m}(\mathbf{R}) \cdot \sum_{i=1}^N q_i R_l^m(\mathbf{r}_i),\quad (9.43)$$

donde $I_l^{-m}(\mathbf{R})$ se denomina un armónico sólido y está definido por,

$$I_l^{-m}(\mathbf{R}) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Y_l^m(\hat{\mathbf{R}})}{R^{l+1}},\quad (9.44)$$

y $R_l^m(\mathbf{r}_i)$ se denomina armónico sólido regular. Definiendo el momento multipolar esférico como $Q_l^m \equiv \sum_{i=1}^N q_i R_l^m(\mathbf{r}_i)$ para $-l \leq m \leq l$, se halla el potencial como,

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (-1)^m I_l^{-m}(\mathbf{R}) Q_l^m \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{1}{R^{l+1}} \\ &\quad \cdot \sum_{m=-l}^l (-1)^m Y_l^m(\hat{\mathbf{R}}) Q_l^m\end{aligned}\quad (9.45)$$

para $R > r_{\max}$, y donde se observa que la expansión aparece como coeficientes en la expansión R^{-1} del potencial.

9.4. Clases de Gauge

Algunos tipos de gauge para $\mu = 0, 1, 2, 3$ y para $j = 1, 2, 3$ son el gauge de Lorenz, $\partial_\mu A^\mu = 0$; el gauge de Coulomb ó de radiación, $\nabla \cdot \mathbf{A} = \partial_j A^j = 0$; el gauge axial, $A_3 = 0$; el gauge temporal ó Hamiltoniano, $A_0 = 0$; el gauge de cono de luz, $n_\mu A^\mu = 0$; el gauge de Poincaré, $x_j A_j = 0$ y el gauge de Schwinger-Fock, $x_\mu A^\mu = 0$

9.5. Campo de un Solenoide Largo y Delgado

El campo de un solenoide largo y delgado se estudia desde el punto de vista del potencial vectorial de la forma,

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3 \mathbf{x}' \quad (9.46)$$

en donde se hace la aproximación $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} = |\mathbf{x}|^{-1} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}|^3} + \dots$ para obtener,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|} d^3 \mathbf{x}' + \frac{1}{c} \int \frac{(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}|^3} d^3 \mathbf{x}' + \dots \quad (9.47)$$

que para un sistema se escribe de la siguiente manera:

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{x}) = \frac{1}{c|\mathbf{x}|} \int \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' + \frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^3} \cdot \int \mathbf{x}' \mathbf{J}_i(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' + \dots \quad (9.48)$$

Teorema.

Si $f(\mathbf{x}')$ y $g(\mathbf{x}')$ son dos funciones bien comportadas de \mathbf{x}' . Si $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ está localizada y tiene divergencia nula, entonces

$$\int (f \mathbf{J} \cdot \nabla' g + g \mathbf{J} \cdot \nabla' f) d^3 x' = 0 \quad (9.49)$$

que se puede escribir como

$$\int [f \nabla' \cdot (g \mathbf{J})] d^3 x' = 0 \quad (9.50)$$

integrando por partes mediante el uso de $u = f$, $du = \nabla' f d^3x'$, $dv = \nabla' \cdot (g\mathbf{J}) d^3x'$, $v = g\mathbf{J}$ y de $U = g$, $dU = \nabla' g d^3x'$, $dV = \nabla' \cdot (g\mathbf{J}) d^3x'$ y $v = g\mathbf{J}$ queda,

$$\int [f \nabla' \cdot (g\mathbf{J})] d^3x' = - \int (g\mathbf{J} \cdot \nabla' f) d^3x' = 0 \quad (9.51)$$

pues $fg\mathbf{J}$ evaluado en el universo es nulo. Con los valores $f = 1$ y $g = x'_i$ entonces se tiene que $\nabla' f = 0$ y $\nabla' g = \hat{\mathbf{x}}'_i$ y por tanto la integral queda,

$$\int (\mathbf{J} \cdot \nabla' x'_i) d^3x' = \int J_i(\mathbf{x}') d^3x' = 0 \quad (9.52)$$

Ahora si se hace la elección $f = x'_i$ y $g = x'_j$ entonces se tiene que $\nabla' f = \hat{\mathbf{x}}'_i$ y $\nabla' g = \hat{\mathbf{x}}'_j$ y por tanto la integral queda,

$$\begin{aligned} & \int (f \mathbf{J} \cdot \nabla' g + g \mathbf{J} \cdot \nabla' f) d^3x' \\ &= \int (x'_i \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_j + x'_j \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{x}}'_i) d^3x' \\ &= \int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3x' \end{aligned} \quad (9.53)$$

y por tanto,

$$\int (x'_i J_j + x'_j J_i) d^3x' = 0 \quad (9.54)$$

Se concluye, debido a la ec. (9.52), que el primer término del potencial vectorial (9.47) se anula y por tanto el término siguiente, usando la ec. (9.54), se modifica de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^3} \cdot \int J_i(\mathbf{x}') \mathbf{x}' d^3x' = \frac{\mathbf{x}}{c|\mathbf{x}|^3} \cdot \int \mathbf{x}' J_i(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= \frac{1}{c|\mathbf{x}|^3} \sum_j x_j \int x'_j J_i(\mathbf{x}') d^3x' \\ &= -\frac{1}{c|\mathbf{x}|^3} \sum_j \frac{1}{2} x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3x' \end{aligned} \quad (9.55)$$

debido a que $x'_i J_j + x'_j J_i = 0$, donde $x'_i J_j = -x'_j J_i$, entonces $2x'_i J_j = -(x'_j J_i - x'_i J_j)$ y por tanto $x'_i J_j = -\frac{1}{2}(x'_j J_i - x'_i J_j)$. Se nota que el resultado está relacionado con el delta de Levi-Civita, por lo que el término se

modifica a

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{c|\mathbf{x}|^3} \sum_j \frac{1}{2} x_j \int (x'_i J_j - x'_j J_i) d^3 x' \\
& = -\frac{1}{2c|\mathbf{x}|^3} \sum_{ijk} x_j \varepsilon_{ijk} x_j \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J})_k d^3 x' \\
& = -\frac{1}{2c|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \times \int (\mathbf{x}' \times \mathbf{J}(\mathbf{x}')) d^3 x' \\
& = -\frac{1}{|\mathbf{x}|^3} \mathbf{x} \times \mathbf{m} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3} = \mathbf{A}(\mathbf{x})
\end{aligned} \tag{9.56}$$

donde \mathbf{m} es el momento magnético y $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \times \mathbf{J}(\mathbf{x})}{2c}$ es la magnetización del medio. Entonces la densidad de flujo magnético está definida por,

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} = \boldsymbol{\nabla} \times \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{x}}{|\mathbf{x}|^3}. \tag{9.57}$$

Usando

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_i &= \varepsilon_{ijk} \nabla_j \varepsilon_{klm} A_l B_m \\
&= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \nabla_j A_l B_m \\
&= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \nabla_j A_l B_m
\end{aligned} \tag{9.58}$$

donde usando las propiedades de los delta de Kronecker se obtiene: $\nabla_j A_i B_j - \nabla_j A_j B_i = (\nabla_j B_j A_i + B_j \nabla_j A_i) - (\nabla_j A_j B_i + A_j \nabla_j B_i)$, dando como resultado la ecuación vectorial,

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{A} + (\mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{A} - (\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\nabla}) \mathbf{B} \tag{9.59}$$

que al aplicarla en la ecuación (9.57) da el siguiente resultado:

$$\mathbf{B} = \frac{3\hat{\mathbf{x}}(\mathbf{x} \cdot \mathbf{m}) - \mathbf{m}}{|\mathbf{x}|^3} \tag{9.60}$$

Y así, el potencial vectorial es (en el sistema CGS-Gauss),

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{m} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \tag{9.61}$$

Si \mathbf{m} está alineado en la dirección del eje z , el potencial en el punto $P(r, \theta, \phi)$ es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{m} \sin \theta}{r^2} \hat{\phi} \quad (9.62)$$

y por tanto la densidad de flujo magnético se puede calcular mediante,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{m \sin \theta}{r^2} \sin \theta \right) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{m \sin \theta}{r^2} r \right) \hat{\theta} \right] \quad (9.63)$$

dando finalmente,

$$\mathbf{B} = \frac{m}{cr^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}) \quad (9.64)$$

que es similar al campo eléctrico dipolar, con momento dipolar eléctrico \mathbf{p} :

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{p}}{r^3} (2 \cos \theta \hat{\mathbf{r}} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (9.65)$$

pero a pesar de dicha afinidad, el potencial escalar no se usa para representar el campo magnético dipolar. Para un solenoide muy delgado con momento magnético por unidad de longitud $\mathcal{M}(\mathbf{x}')$ a lo largo de su longitud, el potencial vectorial en un punto distinto de su eje de simetría longitudinal es,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dL(\mathbf{x}') \\ &= \frac{\mathcal{M}}{c} \left(\int \frac{\sin \theta'}{r'^2} dz' \right) \hat{\phi} \end{aligned} \quad (9.66)$$

donde $r' = r^2 + z'^2 - 2zr' \cos \theta$ (Ley de cosenos) y $\sin \theta' = \frac{r}{r'} \sin \theta$ (Ley de senos), y por tanto el potencial vectorial en un punto diferente a lo eje de simetría queda

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\mathcal{M}(\mathbf{x}') \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} dL(\mathbf{x}') \\ &= \frac{\mathcal{M} r \sin \theta}{c} \left[\int_{-L}^0 \frac{\sin \theta'}{(r^2 + z'^2 - 2zr' \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} dz' \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{\mathcal{M} \sin \theta}{cr^2} \left\{ \int_{-L}^0 \frac{\sin \theta'}{\left[1 + \left(\frac{z'}{r} \right)^2 - 2 \frac{z'}{r} \cos \theta \right]^{\frac{3}{2}}} dz' \right\} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (9.67)$$

pero $r^{-2}z'^2 - 2r^{-1}\cos\theta + 1 = (r^{-1}z' - \cos\theta)^2 - \cos^2\theta + 1 = (r^{-1}z' - \cos\theta)^2 + \sin^2\theta$. Haciendo en cambio de variable $u = r^{-1}z' - \cos\theta$, entonces $du = r^{-1}dz'$, y por tanto,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M} \sin\theta}{c r^2} \left[\int_{-(\frac{L}{r} + \cos\theta)}^{-\cos\theta} \frac{r du}{(u^2 + \sin^2\theta)^{\frac{3}{2}}} \right] \hat{\phi} \quad (9.68)$$

realizando el reemplazo trigonométrico $u = \sin\theta \sec\alpha$, se resuelve la integral resultando,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M}}{c} \frac{1}{r \sin\theta} \left\{ -\cos\theta + \frac{\frac{L}{r} + \cos\theta}{\left[\left(\frac{L}{r} + \cos\theta \right)^2 + \sin^2\theta \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \hat{\phi} \quad (9.69)$$

si se considera la longitud L del solenoide, el ángulo θ formado entre el eje z y un vector r que va desde el punto superior del solenoide al punto de medición P , y el ángulo θ_2 formado entre el eje z y un vector r_2 que va desde el punto inferior del solenoide al punto de medición P , se observa que la ecuación se reduce a,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M}}{c} \frac{1}{r \sin\theta} (\cos\theta_2 - \cos\theta) \hat{\phi} \quad (9.70)$$

dando el valor del potencial vectorial en un punto diferente a lo eje de simetría. Por tanto la densidad de flujo magnético será,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla_r \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \nabla_{r_2} \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} (A_\phi \sin\theta) \hat{\mathbf{r}} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (A_\phi r) \hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{r_2 \sin\theta_2} \frac{\partial}{\partial\theta_2} (A_\phi \sin\theta_2) \hat{\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (9.71)$$

resultando

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mathcal{M}}{cr^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathcal{M}}{cr_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2. \quad (9.72)$$

El resultado anterior es una de las razones para la existencia del monopol magnético, pues tien la forma de dos polos magnéticos puntuales con cargas magnéticas positiva y negativa, donde la magnitud de éstas es $q_m = \frac{\mathcal{M}}{c}$, resultando (para los puntos por fuera del eje de simetría),

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} - \frac{q_m}{r_2^2} \hat{\mathbf{r}}_2. \quad (9.73)$$

con un potencial vectorial magnético dado por,

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{q_m}{r \sin \theta} (\cos \theta_2 - \cos \theta) \hat{\phi}, \quad (9.74)$$

donde se puede ver una correspondencia con la parte eléctrica tanto del potencial escalar $\phi(\mathbf{x}) = \frac{q}{r} - \frac{q}{r_2}$, como de la intensidad de campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\nabla\phi(\mathbf{x})\frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{r}} - \frac{q}{r_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2$.

En el caso de que las ecuaciones (9.70) y (9.72) sigan la restricción $\theta_2 = 0$ para $L \rightarrow \infty$ o sea para $r_2 \rightarrow \infty$ (con el fin de hacer una aproximación a un extremo puntual), quedan como

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{q_m}{r \sin \theta} (1 - \cos \theta) \hat{\phi} \end{aligned} \right\} \theta \neq \pi$$

que no están definidas sobre el eje z negativo, debido a que el solenoide delgado o magneto está sobre dicho eje, que representa la distribución de corriente fuente. Pero un monopolo real tendría un campo esférico isotrópico $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$ que no lo mismo que $\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{q_m}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$, para $\theta \neq \pi$. Se observa que usar un solenoide semi-infinito para representar a un monopolo magnético no es correcto, aunque la línea de singularidad tiene un significado muy claro para el solenoide. Para el monopolo ha sido creado el potencial vectorial,

$$\mathbf{A} = \frac{q_m(1 - \cos \theta)}{r \sin \theta} \hat{\phi} = \frac{q_m}{r} \tan \left(\frac{\theta}{2} \right) \hat{\phi}, \quad \theta \neq \pi \quad (9.75)$$

con el objetivo de reemplazar al solenoide semi-infinito por un monopolo puntual, a pesar de sus inconsistencias físicas.

9.6. Principio de Mínima Acción

El principio de mínima acción o principio de Hamilton se basa en que para un sistema que evoluciona en el tiempo, la diferencia entre su energía cinética y su potencial, para la trayectoria mas realista, es mínima. La diferencia entre estas energías se denomina la función Lagrangiana, $\mathcal{L} = T - U$, y la acción, S , es la evolución temporal de ésta Lagrangiana,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (9.76)$$

donde q, \dot{q} son las posiciones y velocidades generalizadas del sistema. Según el teorema fundamental del cálculo variacional, la variación de la acción debe ser mínima y a primer orden en la trayectoria y se debe anular en los puntos extremos, lo que genera una integral extremal. Por tanto,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (9.77)$$

lo que genera variaciones de las coordenadas generalizadas $q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t)$. Adicionalmente, debido a la integral extremal se tiene que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, entonces,

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q + \delta q, \dot{q} + \delta \dot{q}, t) dt - \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) dt \quad (9.78)$$

como el principio variacional exige que la primera variación sea cero entonces,

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} \delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0 \quad (9.79)$$

al integrar el segundo término por partes se llega a,

$$\delta S = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt = 0 \quad (9.80)$$

pero debido a la condición de extremal se tiene que: $\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} = 0$. También debido a que las variaciones de la Lagrangiana son independientes de δq que es distinta a cero, entonces se verifica,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \quad (9.81)$$

Si hay varios grados de libertad, entonces deben existir diferentes acciones, y por tanto variaciones de éstas para las s funciones diferentes $q_i(t)$, lo que lleva a

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad (9.82)$$

para $i = 1, 2, 3, \dots, s$, denominadas ecuaciones de Lagrange. De éstas se observa que si el potencial no es dependiente de la velocidad,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial [T(\dot{q}_i) - U(q_i)]}{\partial \dot{q}_i} \right\} - \frac{\partial [T(\dot{q}_i) - U(q_i)]}{\partial q_i} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) &= - \frac{\partial U}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (9.83)$$

si $p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}$, es el momento canónicamente conjugado, entonces:

$$\frac{dp_i}{dt} = F_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (9.84)$$

que verifica la dinámica de Newton.

Además si se calcula la variación temporal de la Lagrangiana (usando suma sobre índices contraídos), entonces,

$$\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (9.85)$$

aplicando las ecuaciones de Lagrange (9.82)

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \frac{d\dot{q}_i}{dt} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ &= \frac{d}{dt} \left(\dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned} \quad (9.86)$$

y por tanto se verifica que

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \quad (9.87)$$

donde $h = \dot{q}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} - \mathcal{L}$. Ésta función $h(q_i, \dot{q}_i; t)$ se denomina función energía y si la Lagrangiana no depende del tiempo, entonces se conserva. Ésta transformación es una transformación de Legendre, y si se incluye el momento conjugado $\dot{p}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$, entonces el diferencial de la Lagrangiana es

$$d\mathcal{L} = \dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \quad (9.88)$$

y se define la función Hamiltoniana mediante una transformación de Legendre, de la forma

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t) \quad (9.89)$$

con su diferencial igual a

$$\begin{aligned} d\mathcal{H} &= d\dot{q}_i p_i + \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} dt \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} dt \end{aligned} \quad (9.90)$$

donde la Hamiltoniana no depende de las velocidades generalizadas y por tanto la transformación de Legendre produce un cambio del espacio de las configuraciones (q_i, \dot{q}_i) al espacio de las fases (q_i, p_i) [9], [8].

Bibliografía

- [1] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London **A133**, 60. (1931).
- [2] A. R. Hadsjesfandiar, Field of Magnetic Monopole,
- [3] E. Comay, Aperiion, **14**, 162. (April 2006).
- [4] E. Comay, arxiv:physics/0405050 v1. (11 May 2004).
- [5] C. R. Hagen, Phys. Rev. **140**, B804. (1965).
- [6] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics. J. John Wiley Sons. 3ra Ed. (1999).
- [7] L. D. Landau, y E. M. Lifshitz. Teoría Clásica de los Campos. Editorial Reverté. 3ra Ed. (1971).
- [8] L. D. Landau, y E. M. Lifshitz. Mecánica. Editorial Reverté. 2da Ed. (1991).
- [9] H. Goldstein, Mecánica Clásica. Editorial Reverté. 2da Ed. (1987).
- [10] P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **D74**, 817. (1948).
- [11] Jun S. Song, J. Undergrad, Sci 3: 47-55 (Summer 1996).
- [12] P. Goddard et. al., Nucl. Phys. **B125**, 1. (1977).
- [13] P. Goddard y D. Olive, Rep. Prog. Phys. 41, 1357. (1978).
- [14] C. Montonen y D. Olive, Phys. Lett. **72B**, 117. (1977).
- [15] E. Witten y D. Olive, Phys. Lett. **78B**, 97. (1978).

- [16] T. T. Wu, y C. N. Yang, Phys. Rev. **D12**, 3845. (1975).
- [17] <http://www-nuclear.tau.ac.il/~elic>.
- [18] E. Comay, Nouvo Cimento, **80B**, 159. (1984).
- [19] E. Comay, Nouvo Cimento, **110B**, 1347. (1995).
- [20] D. Zwanziger, Phys. Rev. **137**, B647. (1965).
- [21] S. Weinberg, Phys. Rev. **138**, B988. (1965).
- [22] Ya Shnir. Magnetic Monopoles. Springer. (2005).
- [23] Sir H. Jeffreys and B. Swirles (Lady Jeffreys), Methods of Mathematical Physics. Cambridge Mathematical Library. 3rd Ed. (1972).
- [24] Arfken, Mathematical Methods for Physicists. Associated Press. 3rd Ed. (1985).
- [25] L. Schiff, Quantum Mechanics. McGraw-Hill International Edition. 3rd Ed. (1968).
- [26] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu and F. Laloe. Quantum Mechanics I.